

Marcus du Sautoy

La matematica: un ponte tra le due culture

Mathematics: A Bridge between the Two Cultures



FONDAZIONE
BRUNO KESSLER

Bruno Kessler Lectures

- 2015 -

Marcus du Sautoy

La matematica: un ponte tra le due culture

Mathematics: A Bridge between the Two Cultures

Fondazione Bruno Kessler
www.fbk.eu

Progetto editoriale e redazione
Editoria FBK

ISBN 978-88-98989-16-4
e-ISBN 978-88-98989-17-1

copyright © 2015 by Fondazione Bruno Kessler, Trento. Tutti i diritti sono riservati.

Sommario

Presentazione	7
<i>La matematica: un ponte tra le due culture</i>	13
<i>Mathematics: A Bridge between the Two Cultures</i>	45
Profilo biografico Short Biography	77
Principali pubblicazioni Main Publications	83

Presentazione

Gli eventi legati alla memoria sono tra i più difficili da gestire. Quando si avviano, il ricordo dell'evento da celebrare è fresco, almeno relativamente, e la risposta del pubblico al ricordo quasi spontanea. Col tempo questi momenti tendono a diventare, come si suol dire, «liturgie» cioè ripetizioni quasi forzose che si fanno per senso del dovere, ma di cui si evita di chiedersi il senso.

Non vorrei che ciò accadesse con le *Bruno Kessler Lectures* e soprattutto che accadesse nel momento in cui ho il privilegio di presiedere la Fondazione intitolata a quel geniale personaggio della storia trentina del XX secolo. Penso però che sia un rischio che non corriamo, per la formula che abbiamo scelto e per l'attenzione che mettiamo nella selezione delle personalità a cui chiediamo di intervenire.

La formula infatti è stata pensata proprio per rendere omaggio in maniera forte alla intuizione che portò Bruno Kessler ad avviare quella che ai suoi tempi pareva una avventura, se non addirittura un azzardo: fare di Trento una città universitaria e per questo una città della scienza e della ricerca.

È stato ricordato più volte, anche in quest'aula, che egli partì dal concetto che bisognava uscire dalla visione del «Trentino piccolo e solo». Impegnandosi a creare un istituto universitario nei tumultuosi inizi degli anni Sessanta del secolo scorso egli volle uscire dall'eredità che vedeva a Trento al massimo una succursale universitaria di qualche famoso ateneo con una facoltà

di «Scienze Forestali». Al Trentino serviva invece lo sviluppo, e lo sviluppo aveva bisogno di una scienza che lo animasse e lo governasse. Allora si riteneva quasi unanimemente in Europa e in America che quella scienza fosse la sociologia. Poi ci si rese conto che una sola scienza, per avanzata che fosse, non poteva supportare un impegnativo cammino di sviluppo. Ed allora arrivò non solo la vera «università», combinazione di facoltà a vocazione umanistica, sociale, scientifica e tecnologica, ma accanto ad essa un complesso di centri di ricerca per dare carne e sangue a quello scheletro.

Giocò qui un ruolo essenziale la collaborazione di Kessler con Paolo Prodi, chiamato a reggere quella prima fase dell'Ateneo trentino. Si capiva che all'inizio una università che si impianta in un territorio nuovo corre il rischio di essere un complesso di corsi in cui i professori «fanno lezione», ma poi se ne vanno per fare altrove le loro ricerche. Sarebbe stata la morte dell'università ridotta ad esameificio, ma anche la morte di un territorio che dall'università non avrebbe tratto quella spinta allo sviluppo a cui aspirava.

La produzione della scienza è un meccanismo delicato e senza quella produzione nelle società avanzate non c'è sviluppo né possibilità di affrontare in termini adeguati la sfida della competizione in tempi di grandi cambiamenti epocali.

Oggi possiamo dire, con oltre quarant'anni di esperienza alle spalle, che quell'intuizione fu importante. Il radicarsi qui di centri di ricerca coi loro laboratori tanto nelle scienze umane e sociali quanto nelle cosiddette «scienze dure» hanno costituito una risorsa che ha creato sinergie per lo sviluppo di una università oggi valutata molto positivamente in tutte le classifiche nazionali ed internazionali, ma al tempo stesso per la creazione più in generale di un complesso di laboratori capaci di alimentare

la ricerca nazionale e internazionale a beneficio di una pluralità di contesti a cominciare naturalmente da quello del territorio in cui siamo insediati.

Non posso tacere che oggi qualcuno si chiede se valga ancora la pena di investire in questa peculiarità, una volta che appunto il polo universitario è cresciuto e che le risorse a cui si attingeva sono diventate più scarse. Assistiamo al rincorrersi di visioni miopi su quali debbano essere le «ricadute locali» della spesa, al riproporsi di illusioni sulla possibilità di chiudersi nelle proprie peculiarità. È proprio ricordando che obiezioni non molto diverse ebbe ad affrontare a suo tempo Bruno Kessler (e ci sono tanti testimoni ancora presenti che possono rammentarcelo) che si è pensato di celebrarne la memoria con queste *Lectures*.

Chiamando illustri personalità a farci «toccare con mano» (consentitemi questa espressione) quanto la ricerca non sia opera di personaggi astrusi che rinchiusi nelle loro mitiche torri d'avorio parlano con le famose farfalle che svolazzano sotto l'Arco di Tito, noi rilanciamo l'intuizione e la realtà dell'opera a cui diedero vita Bruno Kessler e tutti coloro che con lui e dopo di lui lavorarono a questa impresa: la scienza è una via per capire il mondo e senza capire il mondo in cui viviamo non lo trasformiamo e non ci consentiamo una partecipazione soddisfacente al futuro.

Una volta, quando molti di noi erano giovani, questo si chiamava fare la rivoluzione. Consentitemi di citare una frase che ha scritto Paolo Prodi in un aureo libretto uscito in questi giorni in libreria e che si intitola *Il tramonto della rivoluzione*: «Il problema fondamentale per la vita nostra e dei nostri figli è se l'Europa, se l'Occidente conserva ancora il potenziale rivoluzionario che ha caratterizzato la sua storia nell'ultimo millennio. Da questo dipende il destino delle nuove generazioni nell'età della globalizzazione».

La rivoluzione non è, come proprio questo illustre storico ci spiega, «i tumulti»: è la fiducia che l'uomo è in grado di costruire il proprio futuro, ed un futuro migliore, proprio perché è in grado di capire, si intende entro certi limiti, dove va la storia. Ma per fare questo c'è bisogno di scienza. E qui la distinzione fra «art and science» per dirla all'inglese è poco fruttuosa: una vera civiltà sa che sono due vie dello stesso percorso verso la comprensione di sé stessi e del mondo.

Fare in modo che si produca questa comprensione è un compito essenziale di chi governa la *polis* e delle forze che la mantengono, perché in sua assenza vi sarebbe solo quel fenomeno ben noto che gli storici chiamano «decadenza». Certo ci vuole una responsabilità reciproca: la *polis* deve supportare lo sviluppo della scienza come strumento di comprensione e gli uomini di scienza devono essere consapevoli che sono al servizio della *polis* nel produrre col loro lavoro modalità di comprensione.

Nello spirito che anima le diverse articolazioni della Fondazione che presiedo questa consapevolezza è ben presente. Lo è per la storia che ci sta alle spalle, ma lo è ancor più perché, proprio in quanto uomini di scienza, abbiamo ben presente di che portata sia la sfida che i tempi odierni ci mettono davanti. Non abbiamo alcuna vocazione ad essere delle Cassandre o dei profeti di sventura, ma la nostra responsabilità ci impone di ricordare che queste terre, il nostro paese, l'Europa di cui ci sentiamo cittadini, debbono prendere consapevolezza della grande sfida con cui dobbiamo fare i conti. In questa prospettiva siamo pronti ad assumerci responsabilmente il nostro ruolo.

È per questo che una volta l'anno abbiamo deciso di trovarci a rendere omaggio alla memoria di chi iniziò quest'impresa chiamando uomini di scienza e di pensiero che, come si direbbe con una frase fatta, «ci facciano volare alto».

Il professor Marcus du Sautoy è perfetto per questo ruolo. Matematico, ma, come sentirete, ricco di sensibilità per la sfera delle scienze umane. Si potrebbe ripetere per lui la frase, un tempo famosa, dalla commedia di Terenzio Afro: *Homo sum, humani nihil a me alienum puto*, non vi sono aspetti della vita umana che un uomo possa considerare estranei e irrilevanti per sé stesso. Se lo diciamo per la matematica, che a taluni pare la scienza dell'astrazione pura, lo possiamo, credo, ripetere con maggior facilità per tutte le attività che sotto il tetto virtuale di questa Fondazione convivono.

Con questo sentimento e con questo ringraziamento cedo la parola al nostro gradito ospite.

Il Presidente

Francesco Profumo

La matematica: un ponte tra le due culture

Marcus du Sautoy

Inizierò facendovi una domanda. Vorrei che ascoltaste questa citazione e che vi chiedeste se l'autore è un artista o uno scienziato: «Creare consiste esattamente nel non creare combinazioni inutili; la creazione è selezione, scelta; le combinazioni sterili nemmeno si presentano alla mente del creatore».

Alzi la mano chi pensa che sia un artista che parla della propria attività creativa; alzi la mano chi pensa che sia uno scienziato che parla di quello che si può fare in laboratorio. Qualcuno non è troppo sicuro? Qualcuno pensa che potrebbe essere sia l'uno che l'altro? Va benissimo, nel campo scientifico ci sono molte cose delle quali non siamo tanto sicuri. Tornerò su questa domanda verso la fine della mia conferenza, ma penso che essa illustri già il fatto che uno dei problemi del nostro sistema educativo è che tendiamo a collocare le persone in campi diversi.

Una delle pecche del nostro sistema educativo è che ci viene chiesto troppo presto in che cosa vogliamo specializzarci. Perfino quando arriviamo all'università ci troviamo collocati in un'area specifica. Ci definiamo uno scienziato, o un umanista o un matematico. Personalmente ho trovato molto frustrante avere l'impressione di dover fare una scelta tra questi due campi.

Avrei seguito un percorso umanistico o artistico o avrei scelto la strada della scienza?

Quando andavo a scuola ho cominciato a suonare la tromba; mi piaceva suonare, cantavo nel coro locale, ho fatto molto teatro; mi piaceva veramente il lato creativo dell'arte. Ma, sempre a scuola, ho avuto i miei primi contatti con la scienza, con il potere della scienza di cambiare il mondo, di scoprire da dove veniamo, o, cosa ancora più emozionante, di pensare a quello che accadrà e a come cambiare l'ambiente in cui viviamo. Questa divisione tra arte e scienza è stata molto pericolosa. Oltre cinquant'anni fa una famosissima conferenza tenuta da Charles Percy Snow in Inghilterra mise in luce quale pericolo costituissero per la nostra società il fatto di chiedere alle persone di scegliere un campo o l'altro. Snow intitolò quella conferenza *The Two Cultures of Arts and Science*¹. Snow riteneva che la vita intellettuale dell'intera società occidentale fosse stata spaccata in due culture, la scienza e l'arte, e che questa spaccatura fosse stata un grande ostacolo alla soluzione dei problemi del mondo. Credo che questo sia vero oggi come lo era quando ne parlava Snow più di cinquant'anni fa; forse oggi le cose vanno un po' meglio, ma c'è ancora molto da fare.

Quel che è certo è che sul finire del secolo vi è stata una profonda crisi in Gran Bretagna dovuta proprio all'interruzione della comunicazione tra la comunità scientifica e la società in generale. La nostra è un'epoca scientifica, nella quale la scienza ha un forte impatto sul nostro futuro. Stiamo decidendo quale tecnologia intendiamo sviluppare nella speranza di risolvere i problemi della crescita della popolazione o del cibo che sarà necessario a una popolazione in crescita, ma è la società in generale che dovrà decidere quali settori della nostra tecnologia scientifica vogliamo incentivare e che cosa potremmo voler limitare. Ma a

causa dell'interruzione delle comunicazioni tra la scienza e il resto della società, in Gran Bretagna c'è stata una vera crisi quando la gente semplicemente non capiva quale impatto avrebbe avuto su di loro.

Prendiamo ad esempio il problema degli ogm. Se non si capisce la scienza, non si vede come si possa decidere se mangiare o no prodotti coltivati con queste nuove tecnologie. Oppure, la ricerca sulle cellule staminali. Vogliamo usare le cellule staminali nella ricerca medica? Se non si capisce che cosa sono le cellule staminali non si può decidere se è o no moralmente giusto usarle nelle ricerche. L'interruzione della comunicazione tra gli scienziati che sviluppavano queste nuove tecnologie e la società sulla quale esse avrebbero avuto un impatto portò al timore e alla diffidenza verso queste nuove idee. La crisi che ne risultò indusse la Camera dei Lords a istituire una commissione che produsse una relazione, chiamata *Jenkins Report*², che cercava di capire questa frattura. La relazione giungeva alla conclusione che parte del problema consisteva nel fatto che gli scienziati stavano nei loro laboratori senza comunicare con la società, senza informare sui grandi cambiamenti che stavano verificandosi, e che questa interruzione delle comunicazioni privava la società della possibilità di prendere decisioni intorno al proprio futuro.

Snow aveva assolutamente ragione. Questa spaccatura tra la comunità scientifica e le comunità umanistiche e artistiche, e con la società in generale, porterà alla diffidenza tra tutte queste fazioni, e alla fine diventa un grave ostacolo alla soluzione dei problemi del mondo.

Penso che le cose stiano cominciando a cambiare, ma penso anche che dobbiamo avere molto più coraggio per quel che riguarda il nostro sistema di istruzione. Quello che voglio fare in questa conferenza è lanciare un messaggio e forse indicare un

strada verso la creazione di un ponte tra queste due culture. Perché quello che ho scoperto quando ero a scuola è stato il modo di combinare il mio amore per l'arte e il mio innamoramento per il mondo della scienza. Ed è nella matematica che ho trovato uno straordinario ponte tra i due.

La matematica: il linguaggio della natura

La matematica è il linguaggio della scienza; è il modo in cui abbiamo capito, padroneggiato e articolato quello che accade nel mondo scientifico. La mia area di ricerca si occupa della simmetria e della teoria dei numeri, e la simmetria si nasconde sotto molti elementi del mondo scientifico.

Se si è un chimico, e si sta cercando di capire le strutture molecolari o i reticoli cristallini, si andrà dal matematico per capire in quali modi quei cristalli possono operare.

Se si è un biologo, si potrebbe non voler trovare un oggetto simmetrico perché spesso non sono granché simpatici; molti virus hanno strutture matematiche simmetriche. Ma comprendendo la matematica di quella struttura possiamo fare dei tentativi per riuscire ad affrontare quel virus. Per di più, la diffusione di un virus è un problema molto matematico. Il crollo in America, in questo momento, del programma di vaccinazioni ha portato a focolai di morbillo. Non essendo stato compreso il ruolo delle vaccinazioni nella protezione della società da gravi malattie, l'incapacità da parte della società di capire la matematica potrebbe avere come risultato una grande tragedia. E tutto perché la società non capisce la scienza.

Anche un fisico è molto attento alla matematica della simmetria. Il Grande Collisore di Adroni è stato appena riattivato al CERN;

se riusciamo ad anticipare le cose che potremmo vedere all'interno di quel collisore, è grazie alla matematica e alle strutture che sappiamo nascondersi nelle particelle fondamentali che oggi conosciamo e che costituiscono il mondo materiale. Il recente annuncio, ad esempio, della scoperta del pentaquark non ci sarebbe stato se la matematica della simmetria non implicasse che una tale particella formata da cinque quark è possibile.

È ben noto che linguaggio potente sia la matematica per capire le scienze. Tuttavia, quello che credo sia meno compreso è quanto la matematica abbia avuto parte in molte pratiche creative di artisti. Nella mia vita da matematico ho passato molto tempo lavorando con artisti creativi, musicisti, produttori teatrali, e quello che ho trovato emozionante è stato il fatto che, in effetti, abbiamo molto di più in comune di quanto avessi pensato, forse più di quanto segnalava Snow nella sua conferenza sulle due culture. Trovare questi ponti, queste aree di collegamento, offre al nostro sistema di istruzione la speranza di fondere queste due culture in un'unica istruzione coerente.

La matematica e la musica

Probabilmente, l'arte creativa che per tradizione ha più punti in comune con la matematica è la musica. Molti parlano del collegamento tra matematica e musica. Alcuni musicisti non ne sono molto convinti, ma penso che quello di cui non si rendono conto è che fanno matematica, spesso inconsciamente. Ecco quel che dice Leibniz, uno degli inventori del calcolo, su questo legame: «La musica è il piacere che la mente umana sperimenta dal contare senza essere consapevole che sta contando».

Capita spesso che un compositore attinga a interessanti strutture matematiche allo scopo di creare certi effetti nella propria musica.

Talvolta questo avviene in modo del tutto consapevole, talaltra inconsciamente. Uno dei miei compositori preferiti, con grande sensibilità per la struttura matematica, è il musicista francese Olivier Messiaen. Mi sono innamorato della musica di Messiaen quando, ancora studente, suonavo la tromba in un'orchestra. Quello di cui allora non ero consapevole era quanta matematica ribolle sotto la sua musica. Via via che ne approfondivo la conoscenza mi rendevo conto di come fosse un matematico istintivo.

Ho poi potuto parlare con un certo numero di compositori che hanno lavorato con Messiaen. Ero curioso di sapere se avesse effettivamente studiato matematica: è risultato che di matematica non ne sapeva molto, ma che vi era arrivato attraverso il suo processo creativo. Una delle sue composizioni più affascinanti è il *Quartetto per la fine del tempo*, un pezzo composto quando era prigioniero di guerra durante la Seconda guerra mondiale. Nel campo c'era un piano verticale piuttosto malmesso, e Messiaen sapeva suonare il piano; scoprì un clarinettista, un violinista e un violoncellista e decise di scrivere un quartetto per quella combinazione di strumenti. Il quartetto tenta di esprimere il senso di disperazione e rovina che l'Europa provava in quel periodo.

Nel primo movimento, la *Liturgia di cristallo*, voleva creare una sensazione di malessere e di tempo interminabile. Per riuscirci è ricorso a un ingegnoso trucco matematico, che vedete impiegato nella partitura del pezzo per pianoforte. Il movimento inizia con il violino e il clarinetto che si scambiano trilli di uccelli – Messiaen era ossessionato dal canto degli uccelli – mentre la struttura che si esegue al pianoforte è estremamente rigida. Messiaen imposta una sequenza ritmica di diciassette note, che continua a ripetersi in tutto il movimento. Le diciassette note cominciano con semiminima, semiminima, semiminima, proseguono con un bel ritmo sincopato e terminano con una semiminima e una

lunga minima. Poi le diciassette note si ripetono: semiminima, semiminima, semiminima eccetera. Si ha questa struttura incredibile, lo stesso ritmo ripetuto ancora e ancora.

Con la sequenza armonica, invece, Messiaen fa qualcosa di completamente diverso: prende 29 accordi, che ripete più volte; quando i 29 accordi sono finiti, li ripete al pianoforte. Ma naturalmente Messiaen ha scelto due numeri che hanno qualcosa di molto speciale. Dato che i numeri 17 e 29 sono numeri invisibili, numeri primi, la scelta di questi numeri significa che l'armonia e il ritmo sono asincroni, e non si ripetono mai fino a quando si sono sentiti 17 volte 29 accordi, e in quel momento il movimento termina. Mentre si ascolta il pezzo si può sentire il ritmo che percorre le 17 note e poi ricomincia, ma la sequenza armonica sta ancora svolgendosi attraverso i suoi 29 accordi. Quando i 29 accordi ricominciano, il ritmo è in qualche modo diverso.

Sembra che Messiaen sia giunto a scegliere questi due numeri quasi intuitivamente. Il suo processo creativo lo portò alla scoperta che questi numeri possiedono una qualità speciale; attraverso questo processo creativo scoprì alcuni dei numeri più importanti ed enigmatici della matematica: i numeri primi. Mentre si ascoltano questi numeri in azione, nel momento in cui creano il senso di incredibile struttura della *Liturgia di cristallo*, si prova un senso di disagio, perché non si riesce a cogliere che cosa venga ripetuto. Il nostro cervello stenta a identificare consapevolmente queste sequenze di 17 e 29 note, ma mentre si ascolta il pezzo si ha gradualmente la sensazione che qualcosa venga ripetuto, pur non sapendo esattamente che cosa. Ed è l'uso sapiente di questo strumento matematico – i numeri primi 17 e 29 – a creare in questo pezzo questo senso di schema eppure di disagio.

Quello che colpisce è quanto spesso il collegamento tra la matematica, le scienze e le arti ha origine nel modo in cui tentiamo di interpretare il mondo naturale che ci circonda. Noi produciamo linguaggi diversi che ci aiutano a capire e a percorrere il nostro ambiente fisico. E possiamo scoprire che lo stesso trucchetto dei numeri primi usato da Messiaen nella *Liturgia di cristallo* è già in opera nel mondo della natura per creare asincronia. C'è l'esempio stupefacente di una cicale, presente in America settentrionale, che per la propria sopravvivenza evolutiva utilizza lo stesso concetto che Messiaen applica nel suo *Quartetto per la fine del tempo*.

Queste cicale hanno uno stranissimo ciclo vitale. Si nascondono sottoterra, senza fare assolutamente niente, per diciassette anni; una vita noiosissima, sino a quando, dopo diciassette anni, riappaiono nella foresta, quasi tutte contemporaneamente. È un momento straordinario. Le cicale cantano. Nella foresta ci sono milioni di cicale. Il rumore della foresta è talmente insopportabile che al diciassettesimo anno chi abita nei pressi in genere si trasferisce altrove. C'è perfino un sito web, da consultare se state organizzando il vostro matrimonio e volete controllare se quello è o no l'anno delle cicale. Dopo sei settimane di festa, però, muoiono tutte e nella foresta torna il silenzio per altri diciassette anni, fino all'apparizione di una nuova generazione di cicale.

È un ciclo vitale assolutamente straordinario. Per prima cosa, è sorprendente che un animale sia in grado di contare fino a diciassette; in effetti, non sappiamo per certo come questo insetto lo faccia. Ma per me l'elemento più affascinante è la scelta del numero diciassette. Diciassette è uno di questi indivisibili numeri primi. È solo una coincidenza? Sembra di no. C'è un'altra specie, in un'altra area dell'America settentrionale, che ha un ciclo vitale di tredici anni. E anche in altre zone dell'America

settentrionale ritorna il tredici o il diciassette; non si trova mai dodici, quattordici, sedici o diciotto. Sembra quindi che ci sia qualcosa, in questi numeri primi, che aiuta questa specie di cicala, ma non sappiamo che cosa. Non ne siamo certissimi, ma abbiamo una teoria: che potesse esserci nei dintorni un predatore che appariva anch'egli periodicamente nella foresta. Il predatore cercava di far coincidere la propria apparizione con l'apparizione delle cicale, in modo da cibarsene. Ora, una cicala con un ciclo vitale non basato su un numero primo enterebbe troppo presto in sincronia con il predatore e si estinguerebbe. Consideriamo un predatore che appaia in un foresta ogni sei anni e una cicala che appaia ogni nove anni: molto rapidamente, dopo due apparizioni, nel diciottesimo anno – un numero divisibile per sei e nove – la cicala incontrerebbe il predatore e si estinguerebbe. Poiché nove non è un numero primo e ha in comune un divisore con sei, risulta che cicala e predatore si sincronizzerebbero molto rapidamente.

Ma se cambiamo il ciclo vitale della cicala vediamo che un ciclo vitale basato su un numero primo può aiutare la cicala a evitare il predatore. Immaginiamo che la cicala appaia più di frequente, diciamo ogni sette anni; dato che appare più di frequente si potrebbe pensare che questo significhi che ha più possibilità di incontrare il predatore. Ma a causa della primalità del numero sette significa che il predatore e la cicala sono asincroni, fin che non si incontrano per la prima volta al quarantaduesimo anno. La cicala ha molte più possibilità di sopravvivere se il suo ciclo vitale è basato su un numero primo.

Vediamo qui come la cicala e il predatore attingano esattamente alla stessa struttura che Messiaen stava usando per il *Quartetto per la fine del tempo*. Per Messiaen era una sequenza ritmica di 17 note e una sequenza armonica di 29 accordi a mantenere l'asin-

cronicità; nel nostro caso, la cicala si comporta come la sequenza ritmica e il predatore come la sequenza armonica, e per la primarietà della scelta di diciassette, o tredici, o sette, le cicale riescono a sopravvivere e a mantenersi asincrone rispetto al predatore.

Quello che mi colpisce è che sebbene si osservino le cose da prospettive diverse – musicale, matematica, evolutivista – spesso si giunge a strutture molto simili. È la caratteristica comune di queste strutture condivise che ci dà occasione di combinare le nostre diverse discipline e ci permette di renderci conto che, in effetti, stiamo creando linguaggi diversi per interpretare lo stesso genere di cose.

C'è una famosissima sequenza di numeri in matematica, ed è una sequenza che probabilmente tutti riconoscete. Sapete dirmi qual è il numero seguente nella sequenza 1 1 2 3 5 8 13 21? Potete dirlo in italiano, se volete. Trentaquattro! Lo schema sotteso alla generazione di questa sequenza è che si sommano i due numeri precedenti per ottenere il numero seguente nella sequenza. Questa è probabilmente una delle più famose sequenze in matematica, e anche in letteratura; chi ha letto *Il codice Da Vinci* di Dan Brown sa che è uno dei codici che devono essere decifrati per cercare di risolvere il mistero.

Questi numeri sono molto importanti nel mondo della natura: è quello che ha scoperto l'italiano Fibonacci. Sono molto importanti in molti processi di crescita naturale. Per esempio, se si prende un fiore e se ne contano i petali, si ha spesso un numero della sequenza di Fibonacci. E se non lo è ... beh, sarà perché un petalo è caduto ... che è il modo in cui i matematici aggirano le eccezioni. Si trovano questi numeri dividendo a metà un frutto; all'interno di vede un disegno a stella che ha un numero di punte Fibonacci: una banana ha una stella a tre punte, una mela una stella a cinque punte, un cachi una stella a otto punte.

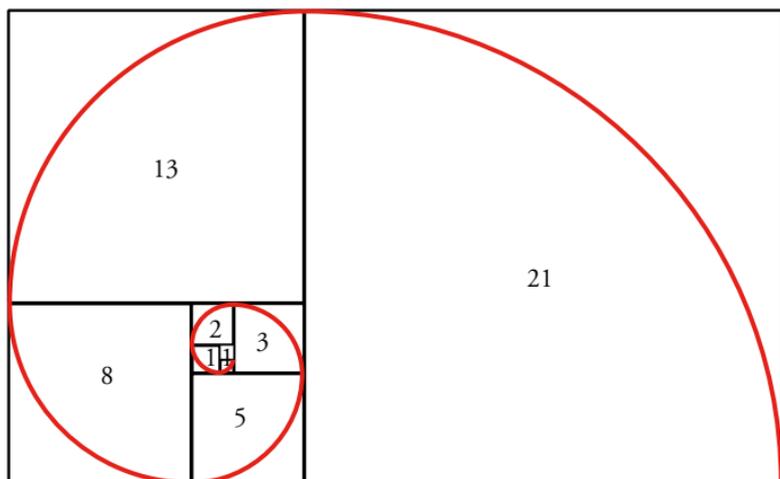
Fibonacci scoprì che questi numeri erano anche la chiave per capire come cresceva il numero di conigli da una generazione all'altra. Capì che se si inizia con una coppia di conigli che impiega una generazione a raggiungere lo stadio in cui può riprodursi e poi è in grado di generare un'altra coppia di conigli, diventa complicato stabilire quanti conigli si hanno da una stagione a quella seguente. Ma capì che c'è uno schema, che il numero di coppie di conigli in ogni generazione cresce secondo una sequenza, appunto la sequenza di Fibonacci.

Mi ha affascinato, un paio d'anni fa, scoprire che Fibonacci non è stato il primo a individuare questi numeri. In effetti, furono scoperti parecchi secoli prima non da matematici, non da scienziati, ma da poeti e musicisti indiani. Essi furono attratti da questa sequenza di numeri perché li aiutava a capire i diversi tipi di ritmi che potevano ottenere con battute lunghe e corte. Nella musica indiana la sezione ritmica sulla tabla è molto importante. Per esibire la propria bravura come suonatore di tabla, bisogna trovare tutte le diverse combinazioni di battute lunghe e corte. Scoprirono che esisteva un algoritmo che generava tutti questi ritmi diversi; è stato questo algoritmo che ha dato origine alla sequenza di Fibonacci.

Per esempio, se avete quattro battute e volete scoprire quanti ritmi producono, potete usare quattro battute, o due battute lunghe, o una corta, una corta e una lunga, o una corta, una lunga e una corta, o una lunga, una corta, una corta, ma è tutto. Questi sono i cinque diversi ritmi che si possono creare con quattro battute, con queste battute lunghe e corte. Ritmi secondo la sequenza di Fibonacci. Ma che cosa succede se volete ottenere un ritmo con sedici battute? Quanti ritmi diversi risultano? Quello di cui si resero conto i poeti e musicisti indiani è che, se si vogliono costruire ritmi aggiungendo una battuta

in più, così da avere cinque battute, si può prendere un ritmo da quattro battute e aggiungerne una corta ottenendo un ritmo da cinque battute, ma si possono anche prendere quelli con tre battute e aggiungerne una lunga. Ora li ho tutti. Questo algoritmo mi dà modo di generare tutti i ritmi con cinque battute usando i ritmi con tre battute e quattro battute. Ecco che il numero di ritmi sarà dato sommando insieme i precedenti due numeri di ritmi. Esattamente la regola che genera i numeri di Fibonacci. Ancora una volta, vediamo che il musicista è attratto da una delle più importanti sequenze di numeri in matematica e nel mondo della natura attraverso l'amore per la musica e il ritmo. In effetti, scopriamo che Hemachandra scrisse su questi numeri e l'algoritmo per generare questi ritmi quasi cento anni prima di Fibonacci. Non voglio rubare questi numeri alla cultura italiana, ma forse dovrebbero essere ribattezzati numeri di Hemachandra-Fibonacci, anche per riconoscere questa fusione tra il mondo dell'arte e il mondo delle scienze naturali.

Un'altra importante caratteristica di questi numeri è che danno origine a una sezione molto particolare, che compare molto spesso nel mondo dell'arte e in natura: la «sezione aurea». Un rettangolo ha i lati nella sezione aurea se il rapporto tra il lato lungo e il lato corto è lo stesso del rapporto tra la somma dei due lati e il lato lungo. Se si mettono insieme quadrati con dimensioni che corrispondono ai numeri di Fibonacci, si genera un rettangolo che, man mano che si aggiungono ulteriori quadrati, ha lati che si avvicinano sempre più alla sezione aurea. E poiché i numeri di Fibonacci sono dovunque nel mondo della natura, questo significa che la sezione aurea compare spesso nelle strutture naturali.



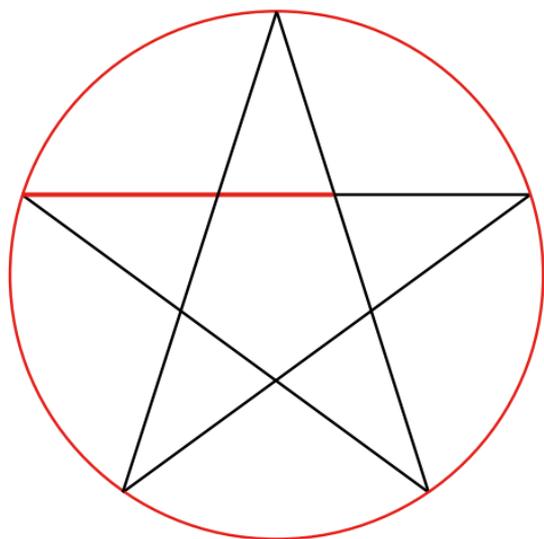
Spirale aurea

La ragione per cui troviamo questo rapporto esteticamente valido anche sotto il profilo artistico ha probabilmente molto a che fare con il fatto che stiamo reagendo a un riconoscimento di strutture naturali, quelle a cui siamo diventati sensibili anche da un punto di vista evuzionistico. Troviamo molti esempi di artisti che usano questo rapporto per strutturare le loro creazioni artistiche. Talvolta questo avviene intenzionalmente, ma spesso l'artista coglie intuitivamente la speciale qualità di questo rapporto.

Ho trovato uno degli esempi più interessanti in una composizione di Mozart: *Il flauto magico*. L'opera racconta il passaggio dal regno caotico della Regina della Notte all'ordinato mondo di Sarastro. L'ouverture dell'opera è come un microcosmo dell'intera opera. Inizia con una coloratura piuttosto barocca, una musica alquanto caotica associata alla Regina della Notte. Ma c'è un punto chiave nell'ouverture che annuncia una trasformazione musicale: tre accordi che risuonano tre volte. Questi accordi

segnano la transizione all'ordinato regno di Sarastro, dove la musica rappresenta qualcosa di più simile al nuovo suono musicale che Mozart ha creato. La cosa interessante dal punto di vista matematico è la collocazione di questa trasformazione. Questi triplici accordi seguono le 81 misure di questa caotica coloratura. Se si conta dai triplici accordi alla fine dell'ouverture si hanno 130 misure. Vi chiederete se questa scelta di numeri è importante: ebbene, dividendo 130 per 81 si arriva il più vicino possibile, con questa scelta di numeri, alla sezione aurea. Mozart ha scelto questo momento di sezione aurea nell'ouverture come momento di transizione per segnare il passaggio dalla musica della Regina della Notte al mondo ordinato di Sarastro.

Potreste giustamente chiedere se Mozart abbia scelto intenzionalmente di fare così, o se vi sia giunto intuitivamente. Penso che ci sia motivo di credere che Mozart effettivamente sapesse che cosa stava facendo. Mozart conosceva la matematica, ne era ossessionato fin da giovanissimo; sappiamo che aveva libri di algebra nella sua biblioteca e spesso firmava le sue lettere con interessanti sequenze di numeri. Ma forse la prova più convincente è che sette anni prima della composizione di quest'opera – che fu l'ultima – era diventato massone. E i massoni conoscevano la matematica. Molto simbolismo massonico è permeato di idee matematiche. Il simbolo della massoneria, ad esempio, è una stella a cinque punte che non ha nulla a che fare con riti satanici, ma con il fatto che i massoni erano costruttori e architetti e in questa forma i triangoli sono in sezione aurea. Nascosta nelle proporzioni di questa stella a cinque punte c'è questa importante idea matematica. Per esempio se si traccia una lunga retta attraverso la stella a cinque punte e la si confronta con la retta più corta, colorata, si vede che queste due rette sono in sezione aurea. Questa sezione è molto importante per la massoneria.



*Stella
massonica*

È dunque possibile che Mozart abbia appreso questa idea matematica durante i sette anni in cui fu membro della massoneria e che poi l'abbia consapevolmente inserita nell'ouverture che scrisse per *Il flauto magico*. È cosa ben nota che quest'opera è impregnata di immagini massoniche. Per esempio il ritmo dei tre accordi che segna la transizione musicale nell'ouverture è in effetti la sequenza che un nuovo adepto deve battere sulla porta della loggia massonica per accedere alla loggia. La collocazione di questi triplici accordi nel punto della sezione aurea dell'ouverture è un altro esempio della fusione di matematica e musica. Questo stretto rapporto tra le due discipline probabilmente giunse al massimo nella musica del XX secolo con compositori come Messiaen, Arnold Schönberg e Igor Stravinsky. Ecco che cosa scrive Stravinsky sull'importanza della matematica per un compositore: «Il musicista dovrebbe trovare nella matematica uno studio che gli è utile quanto lo è per un poeta l'apprendimento di un'altra lingua. La matematica si muove in modo seducente appena sotto la superficie».

La matematica e le arti visive

La matematica è stata anche uno strumento fondamentale per le arti visive. La geometria spesso sobbolle appena sotto la superficie di molti dipinti. Per esempio la matematica è stata estremamente importante per il passo avanti nelle arti visive quando si è stati in grado di rappresentare un universo tridimensionale su una tela bidimensionale. Il potere della prospettiva è passato attraverso la matematica della proiezione da tre dimensioni a due dimensioni. Ma è interessante notare che, se è certo che i matematici andavano in aiuto degli artisti del Rinascimento, non si trattava di un'operazione a senso unico.

In effetti, in quest'epoca i matematici stavano tentando di recuperare alcuni degli oggetti simmetrici che erano stati scoperti nell'antichità. Abbiamo le forme tridimensionali chiamate «solidi platonici», le cinque forme che costituiscono i grandi solidi come il cubo o il dodecaedro, che ha dodici facce pentagonali. Ma oltre a queste forme con tutte le facce uguali, il matematico greco Archimede scoprì tredici nuove forme simmetriche nelle quali le facce non sono necessariamente tutte uguali. Per esempio uno dei solidi archimedei è il classico pallone da calcio col quale ci divertiamo nelle partite con gli amici, costituito di pentagoni ed esagoni. Ma la descrizione completa di tutte queste forme si era persa sin dall'antichità. Ci vollero gli artisti del Rinascimento per recuperare una descrizione completa di tutti i tredici solidi. Per esempio in un famosissimo dipinto del matematico Luca Pacioli, datato 1495 e attribuito a Jacopo de' Barbari, vediamo, sul lato sinistro del quadro, uno dei più complicati tra questi tredici solidi raffigurato sotto forma di una boccia di vetro appesa: è detto rombicubottaedro ed è formato da quadrati e triangoli.

Quello che colpisce è trovare artisti come Jacopo de' Barbari che aiutano i matematici a recuperare una descrizione di questi

tedici solidi archimedei. Per l'artista, disegnare queste forme matematiche è in realtà un modo di esibire la propria abilità artistica, di vantarsi della capacità di creare un complicato oggetto tridimensionale come il rombicubottaedro su una tela bidimensionale. È un'epoca in cui vediamo matematici e artisti lavorare fianco a fianco. Per esempio Leonardo da Vinci collaborò con Pacioli per un suo libro, illustrando tutte queste forme che erano state riscoperte. Leonardo è probabilmente l'ultima persona che ha veramente fuso arte e scienza nelle proprie opere.

Giungendo ai giorni nostri, troviamo molti artisti che stanno esplorando la geometria, ma un genere nuovo di geometria matematica, chiamata «frattali». Uno degli esempi più famosi di questo genere di geometria applicata all'arte visiva sono i *drip paintings* di Jackson Pollock. Quando uno dei suoi dipinti venne venduto all'asta per una somma strabiliante, molti giornalisti si chiesero con disprezzo come fosse possibile che un quadro di Pollock raggiungesse tali quotazioni. Dopotutto, dicevano con sufficienza, 'non si capisce proprio perché questi dipinti di Pollock si vendano a certe cifre'. E in fondo, se alle mie due figlie dodicenni do un barattolo di colore è facile che quando hanno finito di dipingere il salotto assomigli a un Jackson Pollock; e allora tutti potremmo guadagnare montagne di soldi schizzando colore, o no?

In realtà Pollock stava facendo qualcosa di assolutamente unico, e siamo riusciti a capire realmente perché troviamo Jackson Pollock così straordinario guardando le sue opere alla luce della matematica: perché quello che stava facendo era in realtà mettere in atto una nuova struttura geometrica, che i matematici hanno scoperto nel XX secolo ma che la natura ha utilizzato da sempre: un frattale.

Un frattale è una forma geometrica che – quando la si guarda da una distanza sempre più ravvicinata – mantiene la propria

complessità indipendentemente dalla scala. Non si semplifica a una visione ravvicinata. Se si prende una felce, o una cima di broccolo o cavolfiore, che ha la qualità frattale, e la si osserva sempre più da vicino, è molto difficile stabilire quale sia il rapporto di scala. Una cimetta spesso appare del tutto simile all'intera infiorescenza. La cosa notevole è che questo è vero anche per i dipinti di Pollock. Se prendete un suo dipinto e zummate sulle sue diverse sezioni, avvicinandovi sempre di più, diventa veramente difficile dire qual è il dipinto originale e qual è una sezione ingrandita del pezzo. A un certo punto cominciate a distinguere le singole gocce di pittura ma ci vuole un po' prima che la qualità frattale scompaia. Penso che la magia nel vedere un Jackson Pollock dal vivo stia nel fatto che si comincia a perdersi nel dipinto. Avvicinandosi, si perde il senso della proporzione e diventa molto difficile dire dove si è in rapporto al dipinto. Penso che sia questo che rende i dipinti di Pollock così stimolanti.

Un'altra ragione per la quale i dipinti di Pollock ci trasmettono forti emozioni è il fatto che egli riesca a catturare una qualità frattale che vediamo intorno a noi nel mondo della natura. In effetti, possiamo misurare l'ammontare di frattalità nella pittura di Pollock usando quella che viene chiamata «dimensione frattale». La dimensione dalla quale Pollock stava attingendo è esattamente la dimensione che vediamo in natura. Alcuni anni fa sono andato nello studio di Pollock, in America. Era inverno. Lo studio era una grande capanna in mezzo alla natura con finestroni su tutti i lati. Attraverso queste finestre si potevano vedere gli alberi che circondavano lo studio. In quel periodo dell'anno erano spogli, ma questo significava che si poteva cogliere la qualità frattale degli alberi mentre ramificavano sempre più, diventando via via più piccoli ma continuando a mantenere la stessa qualità geometrica. Pollock passava le giornate osser-

vando queste strutture frattali, ed era questa qualità frattale che ripeteva, in forma astratta, nei suoi dipinti.

Ma perché Pollock riusciva a creare questi dipinti frattali mentre le mie due figlie dodicenni non ci riescono, pur spruzzando colore qua e là? In effetti, l'artista aveva uno stile di pittura singolarissimo, molto difficile da falsificare. Una delle cose da ricordare riguardo a Jackson Pollock è che aveva un equilibrio molto precario, e quando dipingeva non riusciva a stare fermo; l'altra cosa è che beveva molto, e dipingeva quando era ubriaco. La combinazione tra ubriachezza ed equilibrio instabile significava che mentre dipingeva barcollava qua e là, e creava quello che in matematica chiameremmo un «pendolo caotico».

Se io spargo colore sono troppo regolare, troppo rigido. Il punto in cui il mio braccio si collega al mio corpo rimane sostanzialmente fisso, creando un pendolo molto regolare e un dipinto che non è frattale. Ma dato che il fulcro di Pollock era in continuo movimento, i suoi dipinti hanno una qualità completamente diversa. La geometria del movimento caotico è un frattale ed è quello che vedete sulle sue tele.

Un modo per creare un falso Jackson Pollock ci sarebbe. Tutto quello che si deve fare è costruire un pendolo e attaccare all'estremità un barattolo di colore; poi, mentre oscilla, bisogna agire sul punto al quale è fissato il braccio del pendolo. Ho provato a mettere in pratica quest'idea, falsificare un Jackson Pollock e creare un *drip painting* caotico, per fondere la matematica con l'arte e farci i soldi. Ho messo quel che è venuto fuori su e-bay, ma disfortunatamente non ne ho cavato molto; però ci sto lavorando. La stessa analisi matematica ci ha permesso di individuare parecchi dipinti che si pensava fossero di Pollock ma che, guardati con l'occhio del matematico, vedevamo privi della qualità frattale caratteristica di un Jackson Pollock, e che quindi andavano considerati dei falsi.

La matematica e la letteratura

Con tutti questi collegamenti tra la matematica, la musica, la geometria e le arti visive, forse la vera sfida è scoprire un legame tra la matematica e la parola scritta e la letteratura. È possibile trovare un modo di fondere il mondo letterario e il mondo matematico? Per me la matematica ha sempre avuto un suo elemento narrativo. I nostri personaggi sono numeri e geometrie e le dimostrazioni che costruiamo sono i racconti di cui sono i protagonisti. Ma anche gli scrittori talvolta scoprono che i loro racconti possono essere un modo interessante di esplorare un concetto matematico.

Uno dei miei scrittori preferiti, che ha usato la letteratura per esplorare concetti matematici, è l'argentino Jorge Luis Borges, autore di molti bellissimi racconti; se non li avete mai letti vi consiglio di farlo, perché sono magnifici microcosmi nei quali Borges esplora i concetti di paradosso, l'idea di infinito, la natura dello spazio, ma lo fa usando lo stratagemma di raccontare una storia.

Tra i racconti di Borges, uno di quelli che mi piacciono di più e che veramente attinge a uno dei problemi matematici del nostro tempo si intitola *La biblioteca di Babele*. In questo racconto troviamo un bibliotecario rinchiuso in una biblioteca che ha un'interessante struttura geometrica. Per tutto il racconto, una decina di pagine in tutto, il bibliotecario cerca di capire quale forma abbia veramente la biblioteca. Il suo viaggio comincia nel primo paragrafo: «L'universo (che altri chiamano la Biblioteca) è composto di un indefinito e forse infinito numero di gallerie esagonali ... Da ciascuno degli esagoni è possibile vedere, interminabilmente, i piani superiori e inferiori»³.

All'inizio del suo viaggio scopre che la biblioteca è come un alveare. Ogni stanza è un esagono con due porte che lo colle-

gano a due altri esagoni. Ci sono piani di esagoni sopra e sotto. Nel corso del racconto il bibliotecario comincia a chiedersi se la biblioteca non si estenda per sempre, se non sia infinita; oppure se sia una biblioteca finita, con un muro che la circonda. Ma allora dietro al muro potrebbe esserci qualcosa che non sia la biblioteca? Ma la biblioteca è l'universo.

Trattandosi di una biblioteca, è piena di libri e i libri hanno tutti una struttura piuttosto matematica. Hanno tutti la stessa forma. Ogni libro ha 410 pagine, ogni pagina ha 40 righe, ogni riga 80 caratteri. Ogni lettera può essere scelta tra i simboli ortografici, che sono 25. Man mano che il bibliotecario esplora la biblioteca comincia a chiedersi se questa biblioteca non contenga una copia di ogni singolo libro che sia possibile scrivere in un libro di questa forma. Ma comincia anche a credere che ci sia un unico esemplare di ogni singolo libro, il che lo porta a concludere che potrebbe effettivamente contare quanti libri ci sono.

A questo punto possiamo provare a fare qualche calcolo. Ci sono 25 possibilità per la prima lettera del libro e analogamente abbiamo altre 25 possibilità per la seconda lettera del libro. Già per le prime due lettere abbiamo una scelta di 25 volte 25 inizi. Avremmo AA, AB, AC e poi BA, BB, BC e così di seguito. Questo significa che ci sono 25 volte 25 scelte solo per le prime due lettere. Ma nelle prime righe abbiamo 80 caratteri, il che ci dà 25 elevato alla 80. Ma ogni pagina ha 40 righe. Quindi abbiamo 25 elevato alla 80 elevato alla 40. Ma non dimentichiamo che ogni libro è composto di 410 pagine. Dunque, il numero totale di libri possibili dentro questa biblioteca è uno straordinario 25 elevato alla 80 elevato alla 40 elevato alla 410. Sono un bel po' di libri. Noi riteniamo che ci siano solo 10^{80} atomi nell'universo osservabile. Se ogni atomo fosse un libro non arriveremmo nemmeno lontanamente al numero di libri

che ci sono nella biblioteca di Babele. Eppure, è ancora un numero finito di libri.

Il bibliotecario di Borges comincia a rendersi conto che la sua biblioteca probabilmente non è infinita, non si estende per sempre, è finita. Ma se è finita, allora, dato che la biblioteca rappresenta l'intero universo, non c'è nient'altro che la biblioteca. E allora come funziona? Alla fine del racconto, il bibliotecario giunge a una soluzione riguardo alla forma della biblioteca: «Mi azzardo a suggerire questa soluzione per questo antico problema. La biblioteca è illimitata e ciclica. Se un eterno viaggiatore l'attraversasse in tutte le direzioni, alla fine dei secoli vedrebbe che gli stessi volumi si ripeterebbero nello stesso disordine»⁴.

Qui si vede come, attraverso il mondo della letteratura, Borges stia tentando di risolvere uno dei grandi problemi della scienza: qual è la forma dell'universo? Che non chiamiamo biblioteca, chiamiamo universo. La reazione della maggior parte della gente è: «Che cosa significa che forma ha? Si estende all'infinito». Ma altri sono meno convinti che l'infinità esista effettivamente e vorrebbero per un universo finito. Ma come può l'universo essere finito? Si va nello spazio e all'improvviso si sbatte in un muro?

In effetti, gli antichi greci pensavano che l'universo fosse avvolto da una grande sfera di vetro sulla quale erano disegnate le stelle. Anche nella cultura dei nostri giorni c'è un interessante esempio di universo di questo genere. Uno dei miei film preferiti è *The Truman Show*, con Jim Carrey. È un bellissimo film, che cattura in un microcosmo la sfida a capire i problemi di un universo finito. Jim Carrey interpreta Truman Burbanks, il quale non si rende conto che il suo intero universo è un artefatto *reality show* televisivo ambientato in una grande cupola. Quando infine comincia a nutrire dei dubbi sul proprio mondo, si allontana in barca sull'acqua che circonda la cittadina nella quale vive, Seah-

ven, solo per scoprire che quello che credeva un cielo infinito è in realtà uno sfondo dipinto sulla parete del set. Oltre l'orlo del suo universo scopre telecamere che registrano ogni sua mossa.

Non credo che noi viviamo nel *Truman Show*. Se l'universo è finito non penso che potremo dirigerci nello spazio, sbattere contro un muro e trovare Dio con una cinepresa o una troupe divina che ci registra in un nostro personale reality show televisivo. Ma c'è un modo di costruire un universo finito senza il problema di sbattere contro un muro. La soluzione è quella a cui è arrivato Jorge Luis Borges nel suo racconto: l'universo è ciclico.

Per capire questa soluzione è utile osservare una versione più piccola, bidimensionale, del nostro universo: il gioco *Asteroids*, creato da Atari nel 1979, serve come esempio perfetto di universo bidimensionale che è finito eppure non ha confini. L'universo consiste semplicemente nello schermo del computer, ma, quando un'astronave si dirige verso la parte superiore dello schermo, invece di rimbalzare contro la cornice in alto, come in un *Truman Show* bidimensionale, riappare senza soluzione di continuità nella parte inferiore dello schermo. Per quel che riguarda l'astronauta che viaggia nella navicella spaziale, sta solo viaggiando interminabilmente nello spazio. Lo stesso criterio si applica se la navicella si dirige verso il lato sinistro dello schermo. Non incontra un muro ma semplicemente riappare sulla destra.

Un astronauta che esplori l'universo potrebbe cominciare a notare dei punti di riferimento che si ripetono, anche se naturalmente essendo l'universo in evoluzione potrebbe essere difficile riconoscere le cose quando vi si passa accanto per la seconda o la terza volta.

L'universo di *Asteroids* ha in realtà una forma riconoscibile. Ammettendo una terza dimensione entro la quale avvolgere

l'universo di *Asteroids*, si possono congiungere la parte superiore e quella inferiore dello schermo per fare un cilindro. Poi, dato che anche i lati sinistro e destro dello schermo sono collegati, posso unire le due estremità del cilindro per creare una ciambella o quello che i matematici chiamano un torus. La superficie di questa forma tridimensionale è l'universo finito nel gioco *Asteroids*. Quindi, qualcosa può essere finito ma, in questo modo, ciclico.

Ma noi viviamo in un universo tridimensionale. Forse viviamo anche noi in un gioco di asteroidi, solo che questo è in 3D invece che in 2D. Immaginate che sia appena avvenuto il Big Bang e che l'universo si sia espanso fino alle dimensioni di questa piccola aula a Trento. Non c'è nulla al di fuori della sala in cui siamo seduti. Se si tenta di uscire dalla sala dirigendosi a destra si riappare attraverso il muro sulla sinistra. Se si esce dal soffitto si riappare dal pavimento. Così almeno funziona nel gioco *Asteroids*, ma noi crediamo che ci sia anche un'altra possibilità. Magari vi siete stufati di sentir parlare di matematica e tentate la fuga verso il fondo della sala, ma non c'è niente da fare: in questo universo vi trovereste a riapparire attraverso la parete anteriore della sala, e finireste sul tavolo dei relatori con me.

Ecco che abbiamo congiunto il nostro piccolo universo tridimensionale nella sala conferenze qui a Trento, e non ha confini. In qualsiasi direzione ci dirigiamo non rimbalziamo contro un muro, eppure questo universo è finito. E questa è la soluzione alla quale è giunto Borges nella *Biblioteca di Babele*: se si collegasse insieme la biblioteca apparirebbe come una versione di questo universo a tre dimensioni sul modello di *Asteroids* che abbiamo costruito in questa sala della Fondazione Bruno Kessler. La cosa interessante è che, proprio come la navicella spaziale viaggerà sempre in tondo in questo universo, così fa la luce. Quindi la

luce che sta alle mie spalle viaggerebbe attraverso la parete che sta alle mie spalle e riapparirebbe attraverso la parete di fondo della sala. Il risultato è che vedrò copie ripetute di me stesso in tutte le direzioni. E allora forse una di quelle stelle lassù, nel cielo notturno, è in effetti il nostro sole, ma la luce ha impiegato molto tempo per fare tutto il giro dell'universo e ritornare al nostro angolo di spazio.

Nella *Biblioteca di Babele* Borges esplora quella che per molti anni è stata una delle più grandi sfide nei libri di matematica: quale forma potrebbe avere un illimitato universo finito a tre dimensioni. Questa sfida era uno dei sette problemi per il millennio posti dai matematici al principio del secolo, la cui soluzione comporta un premio di un milione di dollari. Questo è il primo che è stato risolto. Con quella che viene chiamata «Conggettura di Poincaré», il matematico russo Grigori Perelman è riuscito a dare una descrizione completa di tutti i possibili universi che Borges avrebbe potuto scegliere nel suo racconto. La Conggettura di Poincaré può in qualche modo essere considerata come il completamento del viaggio di Borges. A Borges interessa trovare un modo di rendere la sua biblioteca finita ma senza un muro. Perelman ha dato ora un elenco di tutte le diverse varianti che possiamo avere del racconto di Borges. La cosa affascinante è vedere lo stesso tipo di problema affrontato da moltissime prospettive, dalla prospettiva letteraria, da quella matematica, dalla prospettiva di un gioco per computer, e notare che in fondo in fondo siamo tutti interessati a strutture molto simili.

In effetti, questo racconto mi ha stimolato a continuare il mio viaggio nel tentativo di combinare il mondo dell'arte e il mondo della scienza. Ho scritto recentemente un testo per teatro intitolato *X & Y*, nel quale – con un'attrice londinese – abbiamo usato quest'idea del teatro come microcosmo dell'universo, e at-

traverso la *pièce* esploriamo le conseguenze di un universo finito illimitato. Abbiamo anche progettato una serie di workshop per aiutare gli insegnanti a esplorare attraverso il teatro alcune di queste interessanti idee scientifiche. Gli insegnanti di arti teatrali erano tutti disponibilissimi a partecipare, ma abbiamo sempre chiesto che con loro venisse al workshop teatrale un insegnante di matematica. Molti di loro hanno ammesso di aver parlato per la prima volta con un collega insegnante di matematica quando in sala-professori hanno detto: «Posso partecipare al workshop di teatro solo se vado con un insegnante di matematica». Attraverso i workshop abbiamo scoperto che un'opera teatrale è un modo efficacissimo di creare una fusione tra questi due mondi, quello dell'arte e quello della scienza.

La poesia è un'area della letteratura dove si vedono in uso molte strutture matematiche. In particolare c'è un'interessante nuova forma poetica che utilizza i numeri di Fibonacci, dei quali vi ho già parlato. Si chiama «fib» – in inglese questa parola significa 'bugia' – , ma ora per *fib* si intende una poesia dove il numero di sillabe di ogni riga è un numero di Fibonacci. La poesia che ne risulta ha un bel senso di crescita e ritmo. La forma è stata inventata da Gregory Pincus, e questo ne è un esempio:

One,
Small,
Precise,
Poetic,
Spiraling mixture:
Math plus poetry yields the Fib.

Ho deciso di lanciare una sfida a chi mi segue su Twitter: creare dei propri *fib*s. Ho pensato che le 140 battute di un tweet fossero lo spazio perfetto per creare uno di questi haiku matematici.

Ecco qui il mio preferito tra i *fib*s che ho ricevuto; mi è stato mandato da @benbush:

Tweet

Tweet

Marcus

Here's my fib

(An unwise ad lib?)

Wait: fib? On Twitter? I'm confused

How many of my 140 have I used?

Se volete provare a fondere insieme le vostre idee della matematica e della poesia, mandatemi il vostro *fib* su Twitter all'indirizzo @marcusdusautoy.

L'arte della matematica

Ho parlato a lungo del fatto che le arti creative hanno attinto da molte idee matematiche, ma non direi che sia un traffico a senso unico. Da matematico, ho scoperto quanto lavoro creativo e di immaginazione ci sia nell'essere un matematico, cosa che mi ha sorpreso non poco. Forse questo è in contrasto con le altre scienze, dove si è in qualche modo confinati a descrivere il mondo fisico in cui viviamo. Ma con la matematica c'è un po' più libertà di creare nuovi mondi tutti nostri e di esplorarli. E quella libertà consente un approccio molto più creativo al soggetto, qualcosa di cui molti matematici hanno parlato. Ecco, secondo Karl Weierstrass, i requisiti di un buon matematico: «Un matematico che non sia allo stesso tempo anche un po' poeta non sarà mai un matematico completo».

Anche se si è uno scienziato bisogna essere incredibilmente creativi e pieni di immaginazione per uscirsene con le folli idee

che descrivono l'universo che sta là fuori. Ecco perché è così importante che la scienza e la matematica non siano relegate nei laboratori e nelle sale conferenze, che non ignorino l'arte. Le arti creative hanno molto da insegnarci, molto che può ispirarci, che può indurci a porre nuovi interrogativi e a vedere sotto nuove prospettive i problemi che affrontiamo.

Una delle cose che mi ha maggiormente spinto a diventare un matematico è stato un libro che mi aveva consigliato il mio professore di matematica quando ero a scuola. Si intitola *A Mathematicians's Apology Apologia di un matematico*. Scritto dal matematico di Cambridge Godfrey Harold Hardy, questo bel libricino descrive l'atto creativo di essere un matematico: «Un matematico, come un pittore o un poeta, è un creatore di forme». «La matematica mi interessa solo come arte creativa»⁵.

In alcuni punti del libro l'autore sembra disprezzare l'idea che la matematica sia importante perché è utile per le altre scienze, anzi dichiarava senza esitazioni che non pensava proprio che la matematica che faceva potesse essere di qualche utilità alla società. Credo che sarebbe assai sorpreso nello scoprire quanta della matematica pura con la quale si diletta sia ora al centro della sicurezza in internet e delle norme che codificano i nostri dipinti e la musica. Ma da scolaro mi piaceva molto l'idea che la matematica fosse qualcosa che viene creato per il puro gusto di farlo, che la parte importante del fare e insegnare matematica fosse costituita dal viaggio intellettuale che si intraprende. La matematica ha più a che fare con la narrazione che con la soluzione di complicati problemi di ingegneria. Spesso grandi racconti hanno portato a importanti innovazioni, ma dobbiamo lasciarci trasportare dalla nostra immaginazione e non essere travolti dalla necessità che qualcosa sia utile.

Uno dei miei esempi preferiti di queste storie matematiche è un piccolo teorema dimostrato da Pierre de Fermat: se si prende un numero primo e lo si divide per quattro con resto di uno – per esempio 41, che diviso per quattro dà il resto di 1 – si può sempre scrivere quel numero come somma di due numeri al quadrato. In questo caso, dunque, 41 è 4 al quadrato più 5 al quadrato. Non è che io pensi che questo sia di grande utilità concreta, ma la cosa emozionante nella dimostrazione di Fermat è il meraviglioso viaggio che questa ci fa fare. Voglio dire, che diavolo c'entrano i numeri primi coi numeri al quadrato?

La dimostrazione è un po' come un poliziesco o un thriller. Ci viene data una certa situazione e la storia ci racconta come ci si è arrivati. In questo caso Fermat dice che c'è un collegamento tra numeri al quadrato e numeri primi, ma prima di affrontare la dimostrazione non capiamo quale relazione ci sia tra questi due elementi. Ed è qui che lo scrittore dà il via al nostro viaggio, cominciando a cambiare i personaggi nel cuore della dimostrazione, fino al momento della repentina rivelazione che fa capire perché numeri primi e numeri al quadrato sono in realtà due aspetti della stessa equazione. Per me è questa l'emozione che si prova insegnando o creando matematica. Una dimostrazione porta qualcuno a compiere un incredibile viaggio che mira a fondere due cose che a prima vista non sembrano avere nulla a che fare l'una con l'altra.

Uno dei momenti più belli della mia vita di matematico è stata la scoperta nell'iperspazio di un nuovo oggetto simmetrico i cui contorni hanno nel proprio codice le proprietà delle curve ellittiche, un'area della matematica che a prima vista non sembra aver nulla a che fare con il mondo della simmetria. Io non so ancora se questo oggetto avrà mai una qualche utilità pratica, ma per me questo non è il movente che mi spinge a questi viaggi

matematici. Quello che voglio fare per i miei lettori, o per coloro che assistono a un mio seminario, è portarli in un interessante viaggio intellettuale, mostrare loro che queste due piccole cose, la simmetria e le curve ellittiche, sono effettivamente fuse insieme e collegate.

La ragione per cui riusciamo ancora a essere finanziati per studiare questa matematica apparentemente esoterica è che questi viaggi intellettuali che intraprendiamo spesso sono in relazione con le cose nel mondo della natura e hanno un impatto sui nuovi sviluppi tecnologici che cambieranno il nostro mondo. Per esempio la scoperta di nuove simmetrie ha condotto in passato alla creazione di nuovi efficacissimi codici di correzione degli errori, e le scoperte di Fermat sui numeri primi sono assolutamente determinanti nella scoperta della crittografia per internet. Ma questa non è molto spesso la nostra motivazione.

Forse è per questa ragione che la matematica ha così tanto in comune con l'arte, perché creare matematica comporta fare delle scelte. Penso che la maggior parte delle persone credano che la matematica è un po' come la biblioteca di Babele di Borges: che la matematica contenga semplicemente tutte le affermazioni veritiere che possiamo registrare riguardo ai numeri e alla geometria. Il fatto che io possa usare un computer per fargli sfornare teoremi o affermazioni veritiere sui numeri non significa che la matematica sia finita: questo è fraintendere che cosa è veramente la matematica. La matematica è il matematico che compie delle scelte riguardo a quali affermazioni veritiere meritino un posto nella biblioteca della matematica.

La matematica è un'attività umana. Queste scelte sono motivate dal desiderio di scoprire quelle affermazioni veritiere che hanno in sé un elemento emozionante, dramma, narrazione. Il computer può generare la biblioteca matematica di Babele che

comprende tutte le affermazioni veritiere sui numeri, ma il ruolo di un matematico è quello di prendere le decisioni creative, artistiche, estetiche riguardo a quali teoremi sono speciali. Proprio per questo ruolo importante nella scelta, penso che sia di fondamentale importanza che noi, come matematici e scienziati, attingiamo al lato artistico della nostra personalità, altrimenti ci lasceremo sfuggire molte delle grandi scoperte che influenzeranno il futuro della nostra società.

All'inizio di questa conferenza vi ho chiesto se pensavate che la citazione «Creare consiste esattamente nel non fare combinazioni inutili; la creazione è selezione, scelta; le combinazioni sterili nemmeno si presentano alla mente del creatore» fosse di un artista o di uno scienziato. In realtà il suo autore non era né l'uno né l'altro, o forse era entrambi. Si tratta del matematico francese Henri Poincaré. Si riferiva al fatto di essere un matematico, e condensa le ragioni per le quali credo che la matematica sia il miglior ponte possibile tra due culture: perché incorpora elementi importanti di entrambe le discipline.

Recentemente il «Wired Magazine» mi ha chiesto di mandare una cartolina dal 2024: come sognavo che fosse il 2024. Ho scelto di sognare il futuro del nostro sistema di istruzione. La mia speranza era che gli studenti del 2024 uscissero dalla scuola e dall'università con qualcosa che si chiamasse semplicemente diploma di istruzione. Guarderebbero indietro, al nostro vecchio sistema educativo, e riderebbero per come incaselliamo le nostre discipline. Sarebbe insensato per chiunque dire di aver fatto l'esame di storia, o musica, o matematica o scienza. Tutti questi argomenti sono strettamente collegati, eppure il sistema di istruzione non riesce a trovare i ponti che li collegano. La mia speranza è quella di un sistema di istruzione capace di abbattere le pareti che separano l'aula di matematica dallo studio teatrale,

il laboratorio di scienze dall'aula di musica. Il progresso per la società avverrà attraverso il collegamento e la comunicazione tra aree diverse. E forse è l'università il primo luogo dove questo cambiamento può aver inizio, se usciamo dai nostri dipartimenti, dai nostri piccoli silos, e cominciamo a parlare con chi sta in altri dipartimenti, perché il nostro non è un mondo fatto di due o di molte culture, ma in realtà si tratta di una unica cultura con molti diversi linguaggi e modi di guardare il mondo.

Grazie.

Traduzione di Anna Zangarini

¹ C.P. Snow, *The Two Cultures and the Scientific Revolution*, Cambridge, Cambridge University Press, 1961.

² Science and Technology Third Report. House of Lords, 23 February 2000. <http://www.publications.parliament.uk/pa/ld199900/ldselect/ldsctech/38/3801.htm>

³ J.L. Borges, *The Library of Babel*, in J.L. Borges, *Labyrinths*, New York, New Directions, 2007, pp. 51-58, qui p. 51.

⁴ *Ibidem*, p. 58.

⁵ G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, <http://www.math.ualbert.ca/msc/A%20Matematician's%20Apology.pdf>, pp. 13 e 30; trad. It. *Apologia di un matematico*, Milano, Garzanti, 2002.

Mathematics: A Bridge between the Two Cultures

Marcus du Sautoy

I'm going to start with a question for you, the audience. I want you to look at this quote and I want you to think, is it a quote by an artist or a scientist? «To create consists precisely in not making useless combinations, creation is discernment, choice, the sterile combinations do not even present themselves to the mind of the creator».

Now put your hand up, if you think that it is an artist talking about his or her creative practice. Hands up if you think it is a scientist talking about what they might be doing while they are sitting in the lab? And how many people are not too sure? Maybe it could be either, which is all right because in science there are many things we are not too sure about. I'll come back to this quote towards the end of my talk, but I think it already illustrates that one of the problems with our education system is that we tend to put people into different camps.

One of the faults of our education system is that it asks us to choose too quickly the subjects that we are going to specialize in. Even once you get to university, we find ourselves belonging to a particular department. We define ourselves as a scientist

or a humanist or a mathematician. Personally I found it very frustrating that I seemed to have to make a choice between these two camps. Was I going to go through the humanities or artistic route or would I choose the scientific route?

When I went up to school I started learning the trumpet, I enjoyed playing music, I sang in my local choir, I did a lot of theatre, I really enjoyed the creative side of the arts. But it was also when I was at school that I started to experience science for the first time, the power of science to change the world, to work out where we come from, or more excitingly to work out what's going to happen next and how to change our environment. This divide between the arts and the sciences has been very dangerous. Over fifty years ago a very famous talk given by C.P. Snow in England highlighted the danger to our society of asking people to choose one camp or the other.

C.P. Snow called his lecture *The Two Cultures of Arts and Science*¹. He believed that the intellectual life of the whole western society has been split into two cultures: the sciences and the arts, and that this split has been a major hindrance to solving the world's problems. It is my belief that this is as true today as it was when C.P. Snow was talking about it over fifty years ago. Maybe things are getting better, but we still have a lot of work to do.

Certainly, at the turn of the century we had a big crisis in Britain due precisely to the breakdown of communication between the scientific community and society at large. This is a scientific age, when science is having so much impact on our futures. We are making decisions about the technology that we are going to implement to perhaps solve problems of population growth or the food that is going to be required for the growing population but it is society at large that is going to have to decide what bits of our scientific technology we want to implement and what we might

want to limit. But because of the breakdown between science and the rest of society we had a real crisis in Britain when people just didn't understand how the science would impact on them.

Take for example the question of eating genetically modified crops. If you don't understand the science then how can you make a decision about whether you want to have food that was developed by these new technologies. Or stem cell research. Do we want to use stem cells in medical research? If you don't understand what a stem cell is, you cannot make a decision about whether it is morally right or not to use them in research. The breakdown in communication between the scientists developing these new technologies and society on whom it would impact led to a fear and suspicion of these new ideas. The crisis that resulted led to the House of Lords commissioning a report called the *Jenkins Report*² that sought to understand this breakdown. It concluded that part of the problem was that scientists were sitting in their laboratories, not communicating with society, informing them about the big changes that were happening and this breakdown in communication disenfranchised society in making decisions about its future.

C.P. Snow was absolutely right. This split between the scientific community and the humanities and artistic community and society at large will lead to mistrust between all these factions and ultimately becomes a major hindrance to solving the world's problems.

I think things are beginning to change, but I think we need to be a lot braver with our education system. What I want to do in this talk is to provide a message and perhaps a way forward trying to create a bridge between these two cultures. Because what I found when I was at school, there was a way to combine my love of the arts and my falling in love with the world of science.

And it was mathematics that I found to be an amazing bridge between the two.

Mathematics: the language of nature

Mathematics is the language of science; it is how we have understood and mastered and articulated what happens in the scientific world. My own area of research investigates symmetry and number theory. Symmetry we find hiding under many bits of the scientific world.

If you are a chemist and you are trying to understand molecular structures or crystal patterns, then you will come to the mathematician to understand the ways those crystals may work.

If you are a biologist, you may not want to get a symmetrical object because often they are not very nice; many viruses have mathematical symmetrical structures. But by understanding the mathematics of that structure, we can make some attempt at being able to tackle that virus. In addition, the spread of a virus is a very mathematical problem. The breakdown in America, at the moment, of the immunization program has led to outbreaks of measles. Not understanding the role of immunization in protecting a society against grave diseases, the breakdown in society's understanding of the mathematics could result in a big tragedy. All because society doesn't understand the science.

A physicist too is very sensitive to the mathematics of symmetry. The Large Hadron Collider has just started up again back in CERN. The reasons that we can make any predictions about the things we might see inside that collider are because of mathematics and the patterns we understood hiding underneath the fundamental particles we know at the moment which make up

the material world. The recent announcement, for example, of the pentaquark would have been missed had not the mathematics of symmetry implied that such a particle made of five quarks was possible.

It is generally recognized how powerful mathematics is as a language to understand the sciences. However, what I think is less understood is how much mathematics has played a role in many creative artists' practices. As I have continued my life as a mathematician, I have spent a lot of time still working alongside creative artists, musicians, theatre producers and what I have been excited to find is that, actually, we have a lot more in common than we first realized, perhaps more than C.P. Snow indicated in his lecture on *The Two Cultures*. And I think it is finding these bridges, these areas of connection, which offer the hope for our education system to fuse these two cultures into one coherent education.

Mathematics and music

Probably the creative art which traditionally has most in common with mathematics is music. Many people talk about the connection between mathematics and music. Some musicians are very suspicious of it, but I think what they don't realize is that they are doing mathematics often subconsciously. Here is Leibniz, one of the inventors of calculus, talking about this connection: «Music is the pleasure the human mind experiences from counting without being aware that it is counting».

Very often we find a composer tapping into interesting mathematical structures in order to create effects in his or her music. Sometimes this is done quite consciously, other times uncon-

sciously. One of my favourite composers who had great sensitivity to mathematical structure is the French musician Olivier Messiaen. I fell in love with the music of Messiaen when I was a trumpet player in an orchestra as a student. What I didn't realize at the time is how much mathematics there is bubbling away underneath his music. As I studied it more and more, I realized that he was very much an intuitive mathematician.

I have subsequently talked to a number of composers that worked with Messiaen. I was intrigued to know whether he actually had studied mathematics, but it turns out no, he didn't actually know a lot of mathematics, but he arrived at it through his creative process. One of the most intriguing pieces he composed is *The Quartet for the End of Time*, a quartet that Messiaen wrote while he was a prisoner of war during World War II. In the prisoner of war camp, there was a rickety upright piano. Messiaen played the piano. He discovered a clarinetist, a violinist, and a cellist and he decided to write the quartet for that combination of instruments. The quartet tries to express the sense of despair and collapse that Europe was experiencing during this period.

In the first movement, the *Liturgie de Cristal*, he wanted to create a sense of unease and never ending time. To do this he used a cunning little piece of mathematics. You find this mathematics at work in the score for the piano part. The movement starts with the violin and the clarinet exchanging bird themes – Messiaen was very obsessed with bird themes – but in the piano you find an incredibly rigid structure at work. Messiaen sets up a seventeen note rhythm sequence, which is repeated over and over again throughout the movement. The seventeen notes start with a crotchet, crotchet, crotchet and then go into a beautiful syncopated rhythm and end with a crotchet and a long minim. And then the seventeen notes repeat themselves again:

crotchet, crotchet, crotchet and so on. You have this incredible structure, the same rhythm repeated over and over again.

However, Messiaen does something very different with the harmonic sequence: he takes 29 chords, which he repeats over and over again. When the 29 chords are finished, he goes through the same chords again on the piano. But of course Messiaen has chosen two numbers which do something very special. Because the numbers 17 and 29 are indivisible numbers, prime numbers, the choice of these numbers means that the harmony and the rhythm keep out of sync, never repeating themselves until you've heard 17 times 29 chords by which time the movement has finished. As you listen to the piece you can hear the rhythm going through the 17 notes and then it starts again, but the harmonic sequence is still working its way through its 29 chords. When the 29 chords start again, the rhythm is somewhere different.

It seems that Messiaen came across the choice of these two numbers almost intuitively. His creative process drew him to the discovery that these numbers have a special quality about them. He rediscovered through this creative process some of the most important and enigmatic numbers in the whole of mathematics: the primes. As you listen to these numbers at work creating the sense of incredible structure through the *Liturgie de Cristal* you experience this sense of unease, because you can't quite work out what is repeating. These 17 and 29 note sequences are quite hard for the brain to identify consciously but as you listen to the piece unfold you gradually get the sense that something is repeating, but you are not quite sure what it is. And it is this clever use of this mathematical tool, the primes 17 and 29, that creates this sense of pattern and yet unease in this piece.

What is striking is how often the connection between mathematics and science and the arts has its origins in how we try to

interpret the natural world around us. We produce different languages which help us to understand and navigate our physical environment. So we can actually find the same trick using prime numbers that Messiaen is using in *Liturgie de Cristal* already at work in the natural world to keep things out of sync. There is an amazing example of cicada in North America, which for its evolutionary survival uses the same idea that Messiaen is using in this *Quartet for the End of Time*.

This cicada has an extraordinarily strange life cycle. It hides underground doing absolutely nothing for seventeen years. An incredibly boring life, but after seventeen years they all suddenly emerge into the forest, almost on the same day. It's an extraordinary moment. The cicadas sing away. There are millions of these cicadas in the forest. The sound of the forest is so unbearable that residents generally move out for the seventeenth year because it's so loud. In fact, there is even a website, if you are planning your wedding, you can check to see if there are any cicadas appearing that year. However, after six weeks of partying, they all die and the forest goes quiet for another seventeen years until the next brood of cicadas emerges into the forest.

It is an absolutely extraordinary life cycle. First of all, it's quite an amazing feat for a creature to be able to count to seventeen. We're not actually sure how this insect does it. But for me the intriguing thing is why it has chosen seventeen. Seventeen is one of these indivisible prime numbers. Is it just a coincidence? It seems not. There is another species in another area of North America that has a thirteen year life cycle. And as you move over North America you find either thirteen or seventeen and you never find twelve, fourteen, sixteen or eighteen. So it seems to be something about these primes that is helping these cicadas but what is it?

We are not really too sure, but we have a theory that maybe there was a predator around that also used to appear periodically in the forest. The predator used to try and time its arrival to coincide with the cicadas and eat all the cicadas up. Now, a cicada which has a non-prime life cycle finds that it gets in sync too quickly with the predator and gets wiped out. Let's take a predator that appears every six years in the forest and a cicada that appears every nine years. Very quickly, after two appearances, in year eighteen—a number divisible by six and nine—the cicada meets the predator and gets wiped out. Because nine is not a prime number and it's got a divisor in common with six, it meets the cicada and the predator very quickly get in synch.

But if we change the cicada's life cycle we see that a prime number life cycle can help the cicada to avoid the predator. Let's make the cicada appear more often by appearing every seven years. Because it is appearing more often you might think that means it has more chance to meet the predator. But now because of the primality of the number seven it means that the predator and the cicada keep out of sync until they only meet for the first time in year 42. The cicada has a much better chance of surviving by using a prime number life cycle.

Here we see the cicada and predator tapping into exactly the same structure that Messiaen was using in the *Quartet for the End of Time*. For Messiaen it was a seventeen-note rhythm sequence and the harmonic sequence of twenty-nine chords, which keep things out of sync. So here, we have the cicada behaving like the rhythm sequence and the predator like the harmonic sequence and because of the primality of the choice of seventeen or thirteen or seven, the cicadas are able to survive and keep out of sync of the predator.

What is striking to me that although we might all be coming from different perspectives – musical, mathematical, evolutionary survival – often we are being drawn to very similar structures. It is the commonality of these shared structures that give us the chance to combine our different disciplines and make us realize that, in fact, we are creating different languages to interpret the same sort of things.

There is a very famous sequence of numbers in mathematics, which you will all probably recognize. Can you tell me what the next number is in the sequence? 1 1 2 3 5 8 13 21. You can say it in Italian, if you want. *Trentaquattro*, thirty-four! The pattern behind how this sequence is generated is that you add the two previous numbers together to get the next number in the sequence. This is probably one of the most famous sequences in mathematics; and in literature as well. If anyone has read *The Da Vinci Code* by Dan Brown, it's one of the codes you have to crack on your way to solving the mystery.

These numbers are very important in the natural world. That's what Fibonacci, your compatriot, discovered. They are very important in many natural growth processes. So, for example if you take a flower and you count the number of petals on that flower then often it is a number in the Fibonacci sequence. And if it isn't a number in the Fibonacci sequence ... that's because a petal has fallen off your flower ... which is how mathematicians get round exceptions. You find these numbers if you divide a fruit in half. Inside you see a star pattern that has a Fibonacci number of arms. A banana has a three pointed star, an apple a five pointed star and a sharon fruit an eight pointed star.

Fibonacci discovered that these numbers were also the key to the way that the number of rabbits grows from one generation to the next. He understood that if you start with a pair of rabbits

that take a generation to mature, and then they can have another pair of rabbits, then it's quite a complicated sort of system to determine how many rabbits you get from one season to the next. But then he spotted that there is a pattern here, that the number of pairs of rabbits in each generation grows according to the Fibonacci sequence.

But the intriguing thing for me is that a few years ago I discovered that Fibonacci was not the first to discover these numbers. They were, in fact, discovered several centuries earlier not by mathematicians, not by scientists but by poets and musicians in India. These poets and musicians were drawn to this sequence of numbers because it helped them to understand the different sort of rhythms that they could make with long and short beats. In Indian music the rhythm section on the tabla is very important. To show off what a good tabla player you are, you want to find all the different combinations of long and short beats you can find. What they discovered is that there was an algorithm, which generated all these different rhythms. It was this algorithm that gave rise to the Fibonacci sequence.

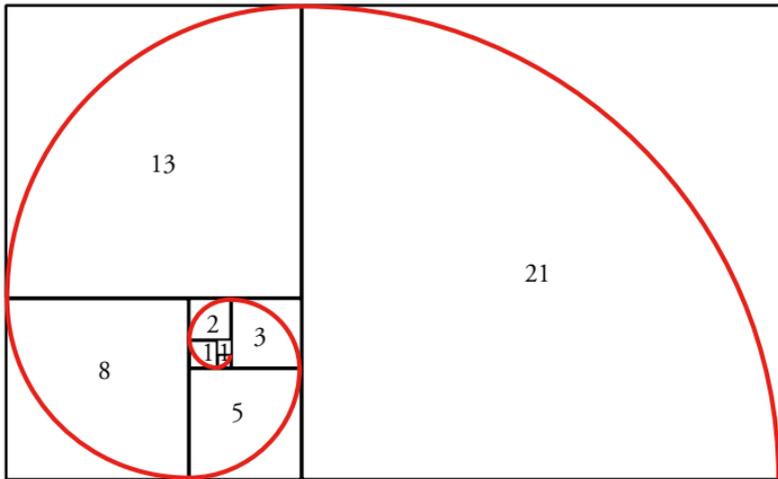
So, for example, if you have four beats and you want to work out how many rhythms there are then you can do four short beats, or we can do two long beats, or we can do short / short / long, or short / long / short, or long / short / short, but that's it. Those are the five different rhythms you can make with four beats, with these long and short beats. A Fibonacci number of rhythms. However, what if you want to make a rhythm with sixteen beats in it? How many different rhythms can you make? What the Indian poets and musicians realized is that, if I want to make rhythms where I add an extra beat, so now I have five beats, then what I do is take the rhythms with four beats and add a short beat to them and then I'll have the rhythms with

five beats, but I won't have all of them yet because I can take the ones with three beats and add a long beat to those. But now I've got them all. This algorithm gives me a way of generating all the rhythms with five beats by using the rhythms with three beats and four beats. So the number of rhythms will be given by adding the two previous numbers of rhythms together. Precisely the rule for generating the Fibonacci numbers.

So here again, we find the musician being drawn to one of the most important sequences of numbers in mathematics and the natural world but through their love of music and rhythm. In fact, you find Hemachandra writing about these numbers and the algorithm to generate these rhythms almost a hundred years before Fibonacci ever started writing about them. So, I don't want to take away these numbers from Italian culture, but maybe they should be renamed the Hemachandra-Fibonacci numbers to recognize this fusion between the world of the arts and the world of natural sciences as well.

One of the other important features of these numbers is that they give rise to a very special ratio, which one finds appearing very often in the artistic and natural world: the golden ratio. A rectangle has sides in the golden ratio if the ratio of the long side to the short side is the same as the ratio of the sum of the two sides to the long side. If you put together squares with dimensions corresponding to the Fibonacci numbers, you generate a rectangle, which as you add more and more squares has sides that get closer and closer to the «golden ratio». And because the Fibonacci numbers are all over the natural world it means that we find this golden ratio often appearing in natural structures.

The reason that we find this ratio also a very aesthetic ratio from an artistic point of view probably has a lot to do with the fact that we are responding to a recognition of natural structures,



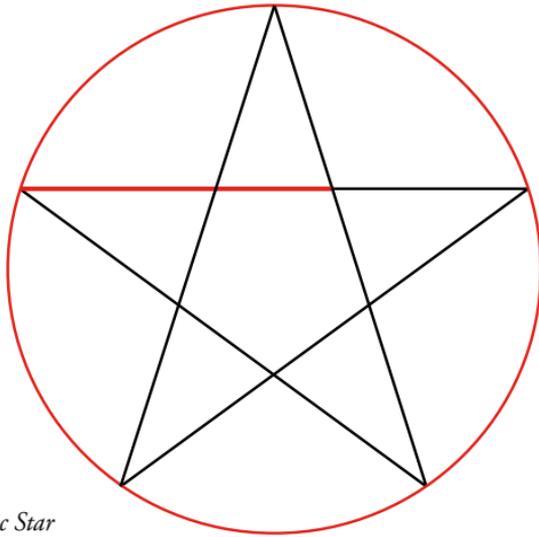
The Golden Ratio

ones that we have become sensitive too from an evolutionary point of view. Time and again we find artists using this ratio to structure their artistic output. Sometimes this is done deliberately, but often the artist is drawn intuitively to the special quality of this ratio.

One of the most interesting examples I have found was actually in a piece by Mozart: his opera *The Magic Flute*. The opera is about the movement from the chaotic domain of the Queen of the Night through to the ordered world of Sarastro. The overture to the opera is a little microcosm of the whole opera. It begins with a rather baroque *coloratura*, rather chaotic music, music that is associated with the Queen of the Night. But there comes a key point in the overture where a musical transformation is announced: three chords are sounded, three times. These chords mark the transition to Sarastro's ordered domain where the music represents something more akin to the new musical sound Mozart had created.

The interesting thing from a mathematical point of view is the placement of this transformation. These triple chords happen after eighty-one bars of this chaotic *coloratura* music. If you then count from the triple chords to the end of the overture you have 130 bars. You might ask is there anything important about this choice of numbers? If you divide 130 by 81, you get as close as it is possible, with these choices of numbers, to the golden ratio. Mozart has chosen this moment as a transitional moment, this point, this golden ratio moment, through the overture to make this transition from the Queen of the Night's music to Sarastro's world of order.

You might legitimately ask whether this is something that Mozart deliberately chose to do or has he been intuitively drawn to this moment? I think there is reason to believe that actually Mozart knew what he was doing. Mozart knew his mathematics. He was very obsessed with it from an early age. He had books of algebra in his library. It turned out. He would often sign off his letters with interesting sequences of numbers. But perhaps the most convincing evidence is that seven years before he wrote this opera—this was his last opera—he became a Mason. And the Masons too knew their mathematics. Much of their symbolism is imbued with mathematical ideas. For example the symbol of the Masons is a five pointed star. The reason is not because of connections with devil worshipping but because the Masons were builders and architects and this shape is a set square for the golden ratio. Hiding inside the proportions of this five pointed star is this important mathematical idea. For example if I take a long line across the five pointed star and compare it to the shorter colored line then these two line are in the golden ratio. This ratio is very important to the Masonic order.



The Masonic Star

So it is quite possible that Mozart would have learned about this mathematical idea during his seven years as a Mason and then consciously threaded it into the overture that he wrote for *The Magic Flute*. It has always been recognized that this opera is laden with Masonic imagery. For example the rhythm of triple chords that marks the musical transition in the overture is in fact the rhythm that a new Mason is required to beat on the door of the Masonic lodge to gain entrance to the lodge. The position of these triple chords at the golden ratio moment through the overture is another example of the fusion of mathematics and music. This close relationship between the two disciplines probably reached its peak in the music of the twentieth century with composers like Messiaen, Schönberg, and Stravinsky. Here is Igor Stravinsky writing about the importance of mathematics to a composer. «The musician should find in mathematics a study as useful to him as the learning of another language is to a poet. Mathematics swims seductively just below the surface».

Mathematics and the visual arts

Mathematics has also been a fundamental tool for the visual artist as well. Geometry is often bubbling just below the surface of many paintings. For example, mathematics was extremely important for the breakthroughs made in the visual arts where we were able to represent a three-dimensional universe on a two-dimensional canvas. The power of perspective came through understanding the mathematics of the projection from three dimensions to two dimensions. But interestingly although mathematicians were certainly assisting the artists of the Renaissance the traffic wasn't all one way.

Mathematicians at this time were actually trying to recover some of the symmetrical objects that had been discovered in antiquity. We have 3-dimensional shapes called the «Platonic solids». These are the five shapes that make great dice like the cube or the dodecahedron with twelve pentagonal faces. But as well as these shapes whose faces are all the same, the ancient Greek mathematician Archimedes discovered thirteen new symmetrical shapes where the faces need not be all the same. For example, one of the Archimedean solids is the classic football made out of pentagons and hexagons that we kick around at the weekend in the park. But a complete description of all these shapes had been lost in antiquity. It took the artists of the Renaissance to recover a complete description of all thirteen solids. For example, in a very famous painting from 1495 of the mathematician Luca Pacioli attributed to the artist Jacopo de Barbari, we see one of the more complicated of these thirteen solids depicted in the shape of a glass bowl hanging in one corner of the painting. It is called the “rhombicuboctahedron” and it is made out of squares and triangles.

What is striking is that we find artists like Jacopo de Barbari helping the mathematicians to recover a description of these thirteen Archimedean solids. For the artists, drawing these mathematical shapes is really a way of showing off their artistic prowess, bragging about their ability to be able to create a complicated three-dimensional object like the rhombicuboctahedron onto a two dimensional canvas. This was a period where we see mathematicians and artists working alongside each other. For example Leonardo da Vinci helped Pacioli with a book that he wrote, illustrating all of these shapes that had newly been discovered. Leonardo is probably the last person to truly fuse the arts and the sciences in his work.

But if we come through to the modern day, we also find that there are lots of artists that are exploring geometry, but a new sort of mathematical geometry called fractals. One of the most famous examples of this new sort of geometry at work in the visual arts are the drip paintings of Jackson Pollock. When one of Pollock's paintings sold at auction for a record sum of money many journalists dismissively said: «Why on earth are these Pollock paintings selling for so much?». After all, I have two twelve year old girls. If I give them a pot of paint, very often the living room looks a bit like a Jackson Pollock after they've finished painting. So surely couldn't we all earn billions of pounds by scattering paint around?

Actually Jackson Pollock was doing something very unique. And we've only been able to understand truly why we find Jackson Pollock so exciting by shining a mathematical light on his paintings. Because what he was doing was actually tapping into a new geometric structure, which mathematicians have only discovered during the twentieth century, but which nature has been using forever: a fractal.

A fractal is a geometric shape, which—when you zoom in on it—retains its complexity at all scales. It does not seem to simplify the more you zoom in. If you take a fern or a piece of broccoli or cauliflower which has the fractal quality, and you zoom in, it's very difficult to tell what scale you're at. A small floret often looks quite like the complete vegetable. The remarkable thing is that this is true of Jackson Pollock's paintings as well. If you take one of Jackson Pollock's paintings and you zoom in on different sections of it, getting closer and closer, it becomes quite hard to tell which is the original painting and which is a magnified section of the piece. At a certain point you start to pick out the individual drops of paint but it takes some time before the fractal quality disappears. I think this is the magic of viewing a Jackson Pollock in the flesh because you start to lose yourself in the painting. As you move toward it, you lose your sense of scale and it's very hard to know where you are in relation to the painting. I think that's what makes Pollock's paintings so exciting.

Another reason why we find the paintings of Pollock so exciting is that Pollock was actually capturing a fractal quality that we see all around us in the natural world. We can actually measure the amount of fractalness in Pollock's painting using something called the fractal dimension. The dimension that Pollock was tapping into is exactly the dimension that we see in nature. I went to Pollock's studio in America some years ago. It was at winter time. His studio was a large hut in the middle of nature with huge windows all along the sides. Through these windows you could look out on the trees that surrounded the studio. At that time of year there were no leaves, but this meant that you could really pick out the fractal quality of the trees as they branched again and again, getting smaller and smaller and yet maintaining the same geometric quality. Pollock would spend his days looking out at these fractal structures. And it's this

fractal quality that he was repeating in an abstract form in his paintings.

But how was Pollock able to create these fractal paintings while my twelve-year-olds flicking their paint can't? He actually had a very unique painting style that is quite hard to fake. One of the things about Jackson Pollock is that he had very bad balance and when he was painting, he couldn't really keep steady. The second thing is that he used to drink a lot, and he used to do the painting when he was drunk, so the combination of being drunk and having bad balance meant that as he was painting he was sort of staggering around and creating what in mathematics we would call a chaotic pendulum.

If I am scattering paint then I'm far too regular, too rigid. The point at which my arm joins my body stays quite fixed creating a very regular pendulum and a painting that is not fractal. But because Pollock's pivot was moving continuously, his paintings have a completely different quality. The geometry of chaotic motion is a fractal and that's what you are seeing on the canvas.

So actually there is a way to fake a Jackson Pollock. What you need to do is to set up a pendulum and put a pot of paint at the bottom and then as it swings you need to perturb the point at which the arm of the pendulum is attached. I actually tried to put this idea into practice, to fake a Jackson Pollock and create a chaotic drip painting, to fuse mathematics with art and make my millions. I put the outcome on e-bay, but unfortunately it didn't sell for very much, so I'm still working on it. But the same mathematical analysis has enabled us to spot quite a lot of paintings that were thought to be by Jackson Pollock, but by using our mathematical eyes we were able to see that they didn't have the fractal quality that is characteristic of a Jackson Pollock and we were able to identify them as fake.

Mathematics and literature

With all these connections between mathematics and music, geometry and the visual arts perhaps the real challenge is to uncover a link between mathematics and the written word and literature. Is it possible to find some way to fuse the literary world and the mathematical world? For me mathematics has always had an element of storytelling about it. Our characters are numbers and geometries and the proofs we construct are the narratives these characters embark on. But writers too have found sometimes that the stories they tell can provide an interesting way to explore a mathematical concept.

One of my favorite writers who has used literature to explore mathematical ideas is an Argentinean writer by the name of Jorge Luis Borges. He is the author of a host of beautiful short stories. If you haven't read any, I really would encourage you to go and have a look at these stories, because they are beautiful little microcosms exploring ideas of paradox, the ideas of infinity, the nature of space, but he is doing it by using the device of telling a story.

One of my favorites of Borges's short stories, one which really taps into the mathematical problems of our age, is called *The Library of Babel*. In this story we find a librarian stuck inside a library with an interesting geometric structure. Throughout the short story which consists of about ten pages, the librarian tries to work out what the shape of his library truly is. He begins his journey with this first paragraph: «The universe (which others call the Library) is composed of an indefinite and perhaps infinite number of hexagonal galleries ... From any one of the hexagons one can see, interminably, the upper and lower floors»³.

As he starts his journey, he discovers that the library is a little like a beehive. Each of the rooms is a hexagon with two doors con-

necting it to two other hexagons. There are layers of hexagons above and below. As the story progresses the librarian begins to wonder, does the library just go on forever? Is it infinite? Or is it a finite library, which has some wall enclosing it. But then might there be something other than the library behind the wall? But the library is the universe.

Now being a library, it is full of books and the books all have a rather mathematical structure. They are all the same shape. Each book has 410 pages, each page has 40 lines, each line has 80 letters. Each letter can be chosen from orthographical symbols that are 25 in number. As the librarian explores the library, he begins to wonder whether maybe this library contains a copy of every single book that is possible to write inside a book of this shape. But he also begins to believe that there is only one example of every single book, which leads him to the conclusion that actually he should be able to count how many book there are.

So, we can do a bit of mathematics here. There are 25 choices for the first letter of the book and similarly for the second letter of the book we have another 25 choices. Already for the first two letters, we have a choice of 25 times 25 openings. We could go AA, AB, AC and then BA, BB, BC and so on. That means that there are 25 times 25 choices just for the first two letters. But we've got 80 letters on the first lines. That makes 25 to the power of 80 first lines in these books. But each page has 40 lines. So that's 25 to the power of 80 to the power of 40 first pages. But recall that each book consists of 410 pages. So, the total number of possible books inside this library is an extraordinary 25 to the power of 80 times 40 times 410. That is a lot of books. We believe there are only 10 to the 80 atoms in the observable universe. If every atom was a book we wouldn't be getting anywhere near the number of books that are in the library of Babel.

But it's still a finite number of books.

Borges' librarian begins to realize that his library is probably not infinite, it doesn't go on forever, it is finite. But if it is finite, then since the library represents the whole universe, there is nothing else other than the library. So how does that work? By the end of the story, the librarian finally comes up with a solution to the shape of the library: «I venture to suggest this solution to this ancient problem. The library is unlimited and cyclical. If an eternal traveler were to cross it in any direction, after centuries he would see that the same volumes were repeated in the same disorder»⁴.

And here we see Borges exploring through the world of literature a solution to one of the great problems of science, which is: What is the shape of our universe? Which we don't call the library, we call the universe. Most people's reaction to the question is: what do you mean what shape it has? It just goes on forever. But others are less convinced that infinity genuinely exists and would vote for a finite universe. But how can the universe be finite? Are you going to go out there and suddenly hit a wall?

Actually, the ancient Greeks thought there was a big glass ball that encased the universe on which the stars are drawn. Even in modern day culture there is an interesting example of such a universe. One of my favorite movies is *The Truman Show* starring Jim Carrey. It's a wonderful movie which captures in a little microcosm the challenge of understanding the problems with a finite universe. Jim Carrey plays Truman Burbanks who doesn't realize that his whole universe is a constructed reality TV show housed in a huge dome. When eventually doubts begin to emerge about his world, he sets out in a boat across the water that surrounds his home town of Seahaven only to discover that what he thought was an endless sky is actually a set painted onto

the studio wall. Behind the edge of his universe he discovers cameras looking in filming his every move.

I don't think we're living in the Truman Show. If the universe is finite I don't think we're going to be able to head out into space and hit a wall and find God with a camera or a divine film crew recording us in our own reality TV show. But there is a way to construct a finite universe without the problem of hitting a wall. The solution is the one Jorge Luis Borges has come up with in his short story: the universe is cyclical.

To understand this solution it helps to look at a smaller 2D version of our universe. The game of Asteroids that was created by Atari in 1979 serves as a perfect example of a 2-dimensional universe that is finite yet without boundary. The universe just consists of your computer screen but when a space ship heads towards the top of the screen rather than bouncing off the edge at the top, like a 2D Truman show, it seamlessly reappears at the bottom. As far as the astronauts traveling inside the space ships are concerned, they are just travelling endlessly through space. The same rule applies if the space ship heads to the left hand side of the screen. It doesn't encounter a wall but simply reappears to the right.

An astronaut exploring the universe might begin to notice seeing landmarks (or spacemarks) repeating themselves, although of course with an evolving universe it might be difficult to recognize things as you pass them for a second or third time.

This Asteroid universe actually has a recognizable shape. If I allow myself a third dimension within which to wrap up the universe of Asteroids, then one can join the top and bottom of the screen to make a cylinder. Then since the left and right hand sides of the screen are also connected I can join the two ends of the cylinder to create a bagel or what mathematicians call a torus. The surface

of this three dimensional shape is the finite universe in the game of Asteroids. So something can be finite but cyclical in this way.

But we live in a three dimensional universe. Maybe we too are living in a game of asteroids but in 3D rather than 2D. Imagine that the Big Bang has just happened and the universe has expanded to the size of this little lecture hall in Trento. There's nothing outside the lecture theatre we are sitting in. If you try to go out of the lecture theatre to the right then you just reappear through the wall on the left. If you go up through the ceiling, then you reappear through the floor. So this is the 2D game of asteroids, but we have another direction we can go. Perhaps you've had enough mathematics and you want to try to escape from the back of the theatre but no, in this universe you'll find yourself reappearing through the wall at the front of the theatre and joining me on the stage.

So here is a way we can join up our little three-dimensional universe in the lecture theatre here in Trento so it doesn't have any boundaries. If we head in any direction, we don't bounce off a wall, and yet this universe is finite. And this is the solution, which Borges came up with in *The Library of Babel*: if you connect the library together it would look like a version of this 3D asteroid universe that we've constructed in this auditorium of the Fondazione Bruno Kessler here in Trento. The interesting thing is that just as a spaceship will travel round and round this universe so too does light. So the light from the back of my head would travel out through the wall behind me and then would reappear through the wall at back of the lecture theatre. The effect is that I will see repeated copies of myself in all directions. So maybe one of those stars out there in the night sky is actually our own sun, but the light has taking a long time to get all the way around the universe to arrive back at our corner of space.

In *The Library of Babel* Borges was exploring what for many years was one of the biggest challenges on the mathematical books: what shape could a finite unbounded 3D universe have. This challenge was one of the seven millennium problems posed by mathematicians at the beginning of the century whose solution comes with a reward of one million dollars. It's actually the first millennium problem to be solved. Called the *Poincaré Conjecture*, the Russian mathematician Grigori Perelman succeeded to give a complete description of all the possible universes that Borges could have chosen in his short story. The *Poincaré Conjecture* in some ways can be interpreted as completing Borges's journey. Borges is interested in finding a way to make his library finite but without a wall. Perelman has now given a list of all the different variations that we can have of Borges's short story. What is fascinating is to see the same sort of problem being attacked from very many perspectives, from a literary perspective, a mathematical one, a computer game perspective, but again, at their heart they are all interested in very similar structures.

Actually, this short story was the inspiration for me to continue my own journey trying to combine the world of the arts and the world of the sciences. I recently wrote a play called *X & Y*, in which—with another actress in London—we used this idea of the theatre being like a little microcosm of the universe and through the piece we explore the consequences of a finite unbounded universe. We also devised a series of workshops to help teachers to explore through theatre some of these challenging scientific ideas. The drama teachers were all keen to take part, but we always demanded that they bring a mathematics teacher with them to the drama workshop. For many they admitted that the first time that they'd ever talked together in the common room was the moment when the drama teacher came up and said: «I can only do the drama workshop if I come with a math teacher».

Through the workshops we've discovered that drama is a powerful way to make a fusion between these two worlds of art and science.

Poetry is one area of literature where you see a lot of mathematical structure being used. In particular there is an interesting new poetic form that employs the Fibonacci numbers that I talked about earlier in the lecture. It is called a «fib», which in English sounds like a lie, but the fib is a poem, where the number of syllables of each line is a Fibonacci number. The resulting poem has a beautiful sense of growth and rhythm. The form was invented by Gregory Pincus, so here's one example of his own fibs:

One,
Small,
Precise,
Poetic,
Spiraling mixture:
Math plus poetry yields the Fib.

I decided to offer my Twitter followers a challenge: to come up with some fibs of their own. I thought the 140 characters of a tweet was the perfect environment to create one of these mathematical haikus. Here was my favorite of all of the fibs I got sent. Sent by @benbush it goes:

Tweet
Tweet
Marcus
Here's my fib
(An unwise ad lib?)
Wait: fib? On Twitter? I'm confused
How many of my 140 have I used?

If you want to try and fuse your own ideas of mathematics and poetry, then please feel free to tweet me your own example of a fib to @marcusdusautoy.

The art of mathematics

I have talked a lot about how the creative arts have tapped into many mathematical ideas, but I think the traffic isn't all one way. What I have found as a mathematician is that there is a lot of creative and imaginative work in being a mathematician, which I found very unexpected. Perhaps this is in contrast to the other sciences where you are somewhat confined to describe the physical world we live in. But with mathematics, there's a little bit more freedom to create your own new worlds and explore those. And that freedom allows for a more creative approach to the subject, something that many mathematicians have talked about. Here's Karl Weierstrass describing what makes a good mathematician: «A mathematician who is not at the same time something of a poet will never be a full mathematician».

Even being a scientist you have to be incredibly creative and imaginative to come up with the crazy ideas, which describe the universe that is out there. And that's why it's so important that the sciences and mathematics don't become isolated in their labs and lecture theatres and ignore the arts. The creative arts have a lot to teach us and inspire us, asking new questions and providing new perspectives on the problems we face.

One of the things that inspired me to become a mathematician was a book recommended to me by my maths teacher when I was at school. It's called *A Mathematician's Apolog*. Written by the Cambridge mathematician G.H. Hardy, this beautiful little book describes the creative act of being a mathematician: «A

mathematician, like a painter or poet, is a maker of patterns». «I am interested in mathematics only as a creative art»⁵.

In parts of the book he is quite dismissive of thinking of mathematics as important because it is useful for the other sciences. He declared rather boldly that he didn't believe the mathematics he did would ever be useful to society. I think he'd be quite surprised how much of the pure mathematics that he reveled in is now part of internet security and the codes that encode our pictures and music. But as a school kid I certainly appreciated the idea of mathematics being something that is created just for its own sake. That the important part of doing and reading mathematics is the intellectual journey you are taken on. Mathematics is more about story-telling than solving complicated engineering problems. Often those great stories lead to new innovations but we must let our imaginations lead us and not get sucked in by the need for utility.

One of my favorite examples of one of these mathematical stories is a little theorem proved by Fermat. Fermat proved that if you take a prime number and you divide it by four and have remainder one—so something like 41, if you divide that by four it has remainder 1—Fermat proved that you can always write that number as the sum of two squared numbers added together. So 41 in this case is 4 squared plus 5 squared. Now I don't think this has been useful for anything, but the excitement about Fermat's proof is the wonderful journey that it takes you on. I mean what on earth do prime numbers have to do with square numbers?

The proof is a little bit like reading a detective story, or a murder mystery. You're given some sort of set up and the story unfolds to tell you how you got to this scenario. In this case, Fermat says there is a connection between squares and primes, but before

I embark on the proof I don't understand how you are going to connect these things. And then the writer takes you on this journey that begins to change the characters at the heart of the proof until there is a sudden moment of revelation as you understand why primes and squares are actually two sides of the same equation. For me this is the exciting thing about reading mathematics or creating mathematics. A proof takes somebody on a surprising journey looking to fuse two things that at first sight seem not to have anything to do with each other.

One of my proudest moments as a mathematician is the discovery of a new symmetrical object in hyperspace whose contours have encoded in them the properties of elliptic curves, an area of mathematics that at first sight seems to have nothing to do with the world of symmetry. As yet I don't know whether this new symmetrical object is going to be useful for anything, but for me that is not the point of going on these mathematical journeys. What I want to do for my readers, for the people who are listening to one of my seminars, is to take them on an interesting intellectual journey, to show that these two things, symmetry and elliptic curves, are actually fused together and connected.

The reason why we still get funded to do such seemingly esoteric mathematics is that these intellectual journeys that we take ourselves on often relate back to things in the natural world and impact on new technological developments that will change our world. For example, the discovery of new symmetries has in the past led to the creation of powerful new error correcting codes. Discoveries that Fermat made on primes are absolutely key to the discovery of internet cryptography. But that's not our motivation very often.

Perhaps this is why mathematics shares so much with the arts because creating mathematics involves making choices. I think

most people think that mathematics is a little bit like Borges' library of Babel: that mathematics simply contains all true statements that we can record about numbers and geometry. Doesn't that mean mathematics is finished because I can just get my computer to just keep churning out theorems, true statements about numbers. But this is to misunderstand what mathematics is truly about. Mathematics is about the mathematician making choices about which true statements are worthy of their place in the library of mathematics.

Mathematics is a human activity. Those choices are motivated by uncovering those true statements that have an element of excitement in them, drama, narrative. The computer can generate the mathematical library of Babel comprising all the true statements about numbers, but the role of a mathematician is to make the creative, artistic, aesthetic decisions about which theorems are special. Because of this important role of choice, I think it is absolutely important and key for us as mathematicians and scientists that we tap into that artistic side of our personalities because we would miss out on so many of the great discoveries that will impact our future societies.

I asked you at the beginning of the talk whether you thought this was a quote by an artist or a scientist? «To create consists precisely in not making useless combinations, creation is discernment, choice, the sterile combinations do not even present themselves to the mind of the creator». In fact it was neither. Or perhaps it was both. This was, in fact, the French mathematician Henri Poincaré talking about being a mathematician and it captures why I believe that mathematics is ultimately the best bridge between the two cultures because it incorporates important elements of both disciplines.

I was recently asked by «Wired Magazine», to send a postcard back from 2024: what would be my dream for what 2024 might be like, and my choice was about a dream for the future of our education system. My hope was that the students of 2024 would graduate from school and university with something that they simply call an educational diploma. They would look back on our old education system and laugh at the way we put our subjects in silos. It would be meaningless for someone to talk about the fact that they'd taken an exam in history, or music, or mathematics or science. All of these subjects are so interconnected and yet our current education system fails to find the bridges that connect all these subjects. My hope would be for an education system that pulled down the walls separating the maths classroom from the theatre studio, the science labs from the music practice rooms. The progress that we'll make in society is by making connections and communicating between different departments. And perhaps in university this is the first place to start doing it, to get out of our departments, our little silos, and start talking to people in other departments because it isn't a world made up of two or many cultures, it's really one culture with lots of different languages and ways of looking at the world. Thank you.

¹ C.P. Snow, *The Two Cultures*, Cambridge, Cambridge University Press, 1961.

² Science and Technology Third Report, House of Lords, February 23, 2000, <http://www.publications.parliament.uk/pa/ld199900/ldselect/ldsctech/38/3801.htm>

³ J.L. Borges, *The Library of Babel*, in J.L. Borges, *Labyrinths*, New York, New Directions, 2007, pp. 51-58, here p. 51.

⁴ *Ibid.*, p. 58.

⁵ G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, <http://www.math.ualberta.ca/mss/misc/A%20Mathematician's%20Apology.pdf>, p. 13 and p. 30.

Profilo biografico | Short Biography

Marcus du Sautoy è «Charles Simonyi Professor for the Public Understanding of Science», professore di Matematica presso l'Università di Oxford e fellow del New College. Nel 2001 ha conseguito il Berwick Prize della London Mathematical Society assegnato ogni due anni alla migliore ricerca matematica condotta da uno scienziato al di sotto dei quarant'anni. Nel 2004 l'«Esquire Magazine» lo ha selezionato come una delle 100 persone più influenti al di sotto dei quarant'anni in Gran Bretagna e nel 2008 è stato incluso nel prestigioso *Who's Who*. Nel 2009 è stato insignito del Royal Society's Faraday Prize, il più importante riconoscimento del Regno Unito per l'eccellenza nella comunicazione scientifica. Nel 2010 è stato insignito dell'Order of the British Empire per il suo contributo alla scienza. Nello stesso anno inoltre ha ricevuto il Joint Policy for Mathematics Board Communications Award e nel 2014 la Zeeman Medal della London Mathematical Society per la promozione della matematica presso il pubblico.

È autore di numerosi articoli e libri sulla matematica. È stato Visiting Professor presso l'École Normale Supérieure di Parigi, il Max-Planck-Institut di Bonn, l'Università ebraica di Gerusalemme e la Australian National University di Camberra. Ha ricevuto lauree *honoris causa* dalla Open University, Queen Mary College di Londra, dalla Liverpool University, dalla University of Bath e dalla University of South Wales.

Marcus du Sautoy è autore del celebre bestseller sulla matematica *The Music of the Primes (L'enigma dei numeri primi)* edito nel 2003 e tradotto in dieci lingue. Questo volume ha vinto due premi di grande rilievo in Italia e in Germania come miglior libro per la divulgazione scientifica. Il suo *Finding Moonshine: A Mathematician's Journey through Symmetry (Il disordine perfetto. L'avventura di un matematico nei segreti della simmetria)* è uscito nel 2008. È stato candidato al Samuel Johnson Prize per il genere *non-fiction*. Il suo terzo libro *The Number Mysteries*

(*L'equazione da un milione di dollari*) è del 2010. Du Sautoy è anche «Super Geek Consultant» per la serie di libri per bambini di Lauren Child incentrata sul bambino-spia Ruby Redfort. L'autore è attualmente impegnato nella stesura di un nuovo libro intitolato *What we cannot know*, che apparirà nel 2016.

Marcus du Sautoy scrive per il «Times», per il «Daily Telegraph», per l'«Independent» e per il «Guardian» e collabora spesso a trasmissioni radiofoniche e televisive. Per diversi anni ha tenuto una rubrica sul «Times» intitolata *Sexy Science*. È stato presentatore del *game-show* televisivo della BBC4 *Mind Games*, per il quale ha ottenuto una *nomination* per la Royal Society of Television's Best Newcomer to a Network Award. Nel 2005 ha presentato per BBC4 e BBC2 un documentario sul suo libro *The Music of the Primes*. Nell'autunno del 2008 ha scritto e presentato una serie Tv *cult* in quattro parti per la BBC intitolata *The Story of Maths*. Ha presentato cinque BBC Horizons, incluso *Alan and Marcus Go Forth and Multiply* al fianco del comico Alan Davis e *The Secret of You*, un film sulla scienza della coscienza. Nel 2010 du Sautoy ha presentato una serie Tv in sei parti intitolata *The Beauty of Diagrams*. Nell'estate del 2011 ha presentato una nuova serie tv *cult* in tre parti intitolata *The Code* trasmessa su BBC2 con enorme successo di critica. Nel 2012 ha partecipato al programma della BBC *Maestro at the Opera* arrivando in finale, dove è stato battuto da Craig Revel-Horwood. Nel 2013 ha condotto la trasmissione *Precision: The Measure of all Things*. Attualmente presenta la *School of Hard Sums* su Dave Channel con il comico Dara O'Brian.

Du Sautoy ha scritto e presentato diverse serie per la radio, tra le quali: *5 Shapes* per BBC Radio 4 nel 2004 e *Maths and Music* per l'Essay su BBC Radio 3 nel 2007, e *The Baroque: From Ecstasy to Infinity* per BBC Radio 3 nel 2009. Nel 2010 ha scritto e presentato una serie in dieci parti per BBC Radio 4 intitolata *A Short History of Mathematics*. Ha tenuto nel 2010 le Royal Institution Christmas Lectures intitolate *The number mysteries*, trasmesse su Channel Five. Le sue presentazioni sulla matematica, che includono quella dal titolo *Why Beckham Chose the 23 Shirt*, sono state proposte ad un target di pubblico molto ampio, dai

direttori di teatro ai banchieri, dai diplomatici ai detenuti. Nel 2009 du Sautoy ha tenuto una *TED Lecture* dal titolo *Symmetry, reality's riddle*.

Collabora regolarmente con vari artisti. È stato il consulente matematico per la commedia *A Disappearing Number* della compagnia teatrale Complicite e della produzione da parte del National Theatre di *A Curious Incident of the Dog in the Nighttime*. Nel 2013 è andato in scena con una performance speciale al teatro Lindbury presso la Royal Opera House esplorando gli aspetti matematici dell'opera di Mozart *Il flauto magico* insieme a cantanti dell'Opera House. Nello stesso anno ha collaborato con il compositore e DJ James Holden allo spettacolo *Consciousness at the Barbican*, e la sua nuova pièce *X&Y*, in cui interpreta il ruolo di X, ha debuttato al Science Museum di Londra ed è stata lo spettacolo di punta nel cartellone dell'Astrolabe Theatre a Glastonbury nell'estate successiva. Nel 2014 ha curato e presentato inoltre tre concerti con l'Orchestra sinfonica della radio svedese esplorando le connessioni tra matematica e musica.

Marcus du Sautoy suona la tromba e gioca a calcio. Come Beckham gioca anche lui con un numero primo, la maglia 17, nel Recreativo FC con sede a Hackney Marshes. Nato nel 1965, vive a Londra con la moglie, tre figli e il gatto Freddie Ljungberg.

* * *

Marcus du Sautoy is the Charles Simonyi Professor for the Public Understanding of Science and Professor of Mathematics at the University of Oxford and a Fellow of New College. In 2001, he won the Berwick Prize of the London Mathematical Society awarded every two years to reward the best mathematical research made by a mathematician under 40. In 2004, «Esquire Magazine» chose him as one of the 100 most influential people under 40 in Britain and in 2008 he was included in the directory *Who's Who*. In 2009, he was awarded the Royal Society's Faraday Prize, the UK's premier award for excellence in communicating science. He received an Order of the British Empire for services to

science in the 2010 New Year's Honours List. He also received the Joint Policy for Mathematics Board Communications Award for 2010 and the London Mathematical Society Zeeman Medal for 2014 for promotion of mathematics to the public.

He is author of numerous academic articles and books on mathematics. He has been a visiting Professor at the École Normale Supérieure in Paris, the Max Planck Institute in Bonn, the Hebrew University in Jerusalem and the Australian National University in Canberra. He has received honorary doctorates from The Open University, Queen Mary College, London, The University of Liverpool, The University of Bath, and The University of South Wales.

Marcus du Sautoy is author of the best-selling popular mathematics book *The Music of the Primes* published in 2003 and translated into ten languages. It has won two major prizes in Italy and Germany for the best popular science book of the year. His book *Finding Moonshine: A Mathematician's Journey through Symmetry* appeared in 2008. It was longlisted for the Samuel Johnson Prize for non-fiction. His third book *The Number 5 Series* was published in 2010. He is also «Super Geek Consultant» for Lauren Child's series of children's books about child spy Ruby Redfort. He is currently writing a new book called *What We Cannot Know* to be published in 2016.

Marcus du Sautoy writes for the «Times», «Daily Telegraph», «Independent», and «The Guardian» and is frequently asked for comment on BBC radio and television. For several years, he had a regular column in the «Times» called *Sexy Science*. He was presenter of BBC4's TV game show *Mind Games*, for which he was nominated for the Royal Society of Television's Best Newcomer to a Network award. In 2005, he presented a documentary for BBC4 and BBC2 based on his book *The Music of the Primes*. In autumn 2008, he wrote and presented a four part landmark TV series for the BBC called *The Story of Maths*. He has presented five BBC *Horizons* including *Alan and Marcus Go Forth and Multiply* co-presented with comedian Alan Davies and *The Secret You* a film about the Science of Consciousness. In 2010, he presented a six part TV series for BBC called *The Beauty of Diagrams*. In summer 2011,

he presented a new 3-part landmark series called *The Code* broadcast on BBC2 to huge critical acclaim. In 2012, he took part in the BBC's program *Maestro at the Opera* making it through to the final where he was beaten by Craig Revel-Horwood. In 2013, he presented the three part series *Precision: The Measure of all Things*. He currently co-presents the *School of Hard Sums* on Dave with comedian Dara O'Briain.

He has written and presented several series for radio including: *5 Shapes* for BBC radio 4 in 2004, *Maths and Music* for the Essay on BBC radio 3 in 2007, and *The Baroque: From Ecstasy to Infinity* for BBC radio 3 in 2009. In 2010 he wrote and presented a ten part series for BBC Radio 4 called *A Short History of Mathematics*. He gave the Royal Institution Christmas Lectures in 2006 entitled *The Number My5teries*, broadcast on Channel Five. His presentations on mathematics, which include *Why Beckham Chose the 23 Shirt*, have played to a wide range of audiences: from theatre directors to bankers, from diplomats to prison inmates. In 2009, he was invited to give a TED lecture entitled *Symmetry, Reality's Riddle*.

He collaborates regularly with different artists. He was the mathematical advisor for Complicite's play *A Disappearing Number* and the National Theatre's production of *A Curious Incident of the Dog in the Nighttime*. In 2013, he staged a special performance in the Lindbury theatre at the Royal Opera House exploring the mathematics of Mozart's opera *The Magic Flute* with singers from the Opera House. The same year he collaborated with composer and DJ James Holden on a performance entitled *Consciousness at the Barbican* and his new play *X&Y*, in which he plays X, opened at the Science Museum in London and headlined the Astrolabe Theatre at Glastonbury the following summer. In 2014, he also curated and presented three concerts with the Swedish Radio Symphony Orchestra exploring the connections between mathematics and music.

Marcus du Sautoy plays the trumpet and football. Like Beckham, he also plays in a prime number shirt, no 17, for Recreativo FC based in the Hackney Marshes. Born in 1965, he lives in London with his wife, three children, and cat Freddie Ljungberg.

Principali pubblicazioni | Main Publications

- M. du Sautoy, *Finitely Generated Groups, p -adic Analytic Groups and Poincaré Series*, in: *Annals of Mathematics*, 1993, 137, pp. 639-670
- and J.D. Dixon, *A. Mann, and D. Segal, Analytic pro- p Groups* (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 61), 2nd edition, Cambridge, Cambridge University Press, 1999, 368 pp.
 - and F. Grunewald, *Analytic Properties of Zeta Functions and Subgroup Growth*, in: *Annals of Mathematics*, 2000, 152, 3, pp. 793-833
 - *Counting p -groups and Nilpotent Groups*, in: *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 2000, 92, pp. 63-112
 - *Counting Subgroups in Nilpotent Groups and Points on Elliptic Curves*, in: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2002, 549, pp. 1-21
 - *The Music of the Primes: Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics*, London, 4th Estate, 2003, 335 pp.
 - and L. Woodward, *Zeta Functions of Groups and Rings* (Lecture Notes in Mathematics, 1925), Berlin, Springer, 2008, 208 pp.
 - *Finding Moonshine. A Mathematician's Journey through Symmetry*, London, 4th Estate, 2008, 400 pp.
 - *The Number Mysteries*, London, 4th Estate, 2010, 320 pp.
 - and M. Vaughan-Lee, *Non-PORC Behaviour of a Class of Descendant p -groups*, in: *Journal of Algebra*, 2012, 361, pp. 287-312

Finito di stampare per conto della Fondazione Bruno Kessler
nel mese di dicembre 2015 da Publistampa Arti grafiche
(Pergine Valsugana)
su carta Fedrigoni Tintoretto

«... quello che ho scoperto quando ero a scuola è stato il modo di combinare il mio amore per l'arte e il mio innamoramento per il mondo della scienza. Ed è nella matematica che ho trovato uno straordinario ponte tra i due.»

«... I found when I was at school, there was a way to combine my love of the arts and my falling in love with the world of science. And it was mathematics that I found to be an amazing bridge between the two.»